

Я. А. Кулик, Т.Є. Вуж, Б.Ф. Коваль

Експеримент в медицині Комп'ютерні системи та Інформаційні технології

Вінниця ВНТУ 2018

УДК 621.3
ББК 32.811я73
К70

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного медичного університету ім. М.І. Пирогова Міністерства охорони здоров'я України (протокол № __ від __ «_____» 2018 р.)

Рецензенти:

Р. Н. Квєтний, доктор технічних наук, професор

А.І. Поворожнюк, доктор технічних наук, професор

О.В. Чалий, доктор фізико-математичних наук, професор

Кулик Я.А., Вуж Т.Є., Коваль Б.Ф. Експеримент в медицині. Комп'ютерні системи та інформаційні технології /
К 70 Монографія. – Вінниця: ВНМУ, 2018. – 144 с.

ISBN

В монографії розглядаються теоретичні засади і практичні аспекти проведення медичного експерименту і оброблювання результатів. Призначена для магістрів, аспірантів та наукових працівників.

УДК 621.3
ББК 32.811я73

ISBN

© А. Кулик, Т. Вуж, Б.Коваль 2018

Зміст

Вступ	4
1 Планування експерименту	5
1.1 Історія розвитку планування експерименту	5
1.2 Загальні положення	7
1.3 Алгоритм планування і здійснення повного факторного експерименту	13
Література	31
2 Вимірювання фізичних величин і реєстрація даних	32
2.1 Основні положення	32
2.2 Режими реєстрації даних під час проведення експерименту	40
2.3 Мікропроцесорні вимірювальні канали	49
2.4 Однокристальні мікроконтролери	71
Література	75
3 Оброблювання результатів експерименту	76
3.1 Інтерполяція і апроксимація даних	76
3.2 Згладжування даних експерименту	82
3.3 Регресійний аналіз	83
3.4 Основи дисперсійного аналізу	89
3.5 Спектральний, секвентний та вейвлет-аналіз	92
3.6 Фільтрація даних	108
3.7 Мета-аналіз	118
Література	143

Вступ

Сучасний рівень розвитку і застосування комп'ютерних систем та інформаційних технологій відзначається складністю не лише окремих апаратних і програмних компонентів, але й технологій, концепцій, ідей, на яких вони базуються.

Пропонована монографія присвячена базовим знанням при плануванні і проведенні експерименту, а також оброблюванні отриманих результатів з урахуванням особливостей його постановки в медичній галузі.

Теорія планування і проведення експерименту формує заходи і способи роботи дослідника, а володіння основами теорії експерименту і практичними навичками її застосування дозволяє суттєво підвищити ефективність роботи дослідника. Це дозволяє з найменшими витратами вирішувати багато практично важливих задач: будувати за отриманими даними математичні моделі об'єктів, аналізувати їх, здійснювати оптимізацію процесів, перевіряти різні гіпотези тощо.

На відміну від існуючої літератури передбачається використання програмних продуктів вільного безкоштовного розповсюдження, а теоретичні питання доведені до рівня алгоритмів, які достатньо просити реалізувати в середовищі Excel, Matlab, MathCad тощо.

Головною задачею книги є вироблення логічного мислення для побудови комп'ютерних систем та інформаційних технологій на база комп'ютерної техніки та одно кристальних мікроконтролерів.

Автори надіються, що монографія буде корисною для молодих вчених і аспірантів і будуть вдячні за висловлені зауваження.

1 Планування експерименту

1.1 Історія розвитку планування експерименту

Планування експерименту широко використовується сьогодні, але його джерела відомі давно і пов'язані з чисельною містикою, пророцтвами та забобонами. Власне це було не планування експерименту як такого, а планування суто чисельного експерименту, тобто розташування чисел таким чином, щоб виконувались чіткі умови, наприклад рівність сум чисел за рядками, стовпчиками та діагоналями. При цьому до клітин квадрату поміщуються числа натурального ряду.

Згідно однієї версії близько 2200 р. до н.е. китайський імператор Ю здійснював містичні розрахунки за допомогою квадрату розташованому на панцирі божественної черепахи. Клітини цього квадрату заповнені числами 1 – 9, а суми за всіма лініями складають 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 1.1. Квадрат імператора Ю

У 1514 р. німецький художник Альбрехт Дюрер на гравюрі «Меланхолія» зобразив містичний квадрат розміром 4×4. Цікавим є те, що в нижньому рядку квадрата поряд стоять числа 1514 (рік створення гравюри). Це ілюструє додаткову умову, яка накладається при їх побудові.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 1.2. Квадрат А. Дюрера

Протягом декількох сторіч, побудовою магічних квадратів займалися індійські, арабські, французькі, німецькі математики.

Побудова магічних квадратів відноситься до задач комбінаторного аналізу, теоретичні засади якого заклав Г. Лейбніц. Він не лише розглянув і розв'язав основні задачі комбінаторики, але й показав їх практичне застосування для: кодування та декодування, ігор та статистики, логіки винаходів та геометрії, військового мистецтва, граматики, медицини, юриспруденції, технології та комбінації спостережень. Остання галузь найближча до планування експерименту.

Одну з комбінаторних задач поставив у 1779 р. відомий петербурзький математик Л.Ейлер. Він запропонував вибрати 36 офіцерів 6

рангів з 6 полків і розташувати їх у каре таким чином, щоб в кожному ряду і в кожній шерензі було по одному офіцеру кожного рангу і по одному з кожного полку. Не дивлячись на те, що задача нагадує математичне посмішку, але вона має пряме відношення до планування експерименту. Вона повністю відповідає задачі побудови парних ортогональних 6×6 квадратів. Коли виявилось, що задача рішення не має, Ейлер висунув гіпотезу про те, що не існує пари ортогональних квадратів порядку $n = 1 \pmod{4}$.

Задачею Ейлера і латинськими квадратами взагалі потім займалися багато математиків, але майже ніхто з них не замислювався над їх практичним застосуванням. Тепер латинські квадрати є одним найбільш популярних способів накладання обмежень на рандомізацію при наявності джерел неоднорідностей дискретного типу під час планування експерименту. Групування елементів латинського квадрата, завдяки властивостям (кожний елемент з'являється один і лише один раз в кожному рядку і в кожному стовпчику квадрата), дозволяє захистити головні ефекти від впливу неоднорідностей. Вони також широко використовуються як засіб скорочення перебирань в задачах комбінаторики.

Виникнення сучасних статистичних методів планування експерименту пов'язано з ім'ям Р.Фішера. З 1918 р. він розпочав відому серію робіт на Рочемстедській агробіологічній станції в Англії. В результаті 1935 р. з'явилася його монографія «Design of Experiments», яка дала назву всьому науковому напрямку. Спочатку основним методом планування був дисперсійний аналіз. Фішер створив його засади, описавши всі його особливості (однофакторний та багатофакторний експерименти, із обмеженням і без обмеження на рандомізацію). При цьому він використовував латинські квадрати, разом Ф.Йетсом дослідивши і описавши їх властивості. Подальшим розвитком теорії стало планування за латинськими кубами, описане у 1942 р. А. Кишеном. Потім Р.Фішер незалежно опублікував дослідження щодо ортогональних гіпер-греко-латинських та гіпер-кубах. У 1946-1947 рр. Р.Рао роздивився їх комбінаторні властивості. Подальшого розвитку теорія латинських квадратів набула у працях Х.Манна (1947 – 1950 рр.). Дослі-

дження Р.Фішера, які проводились для галузі агробіології характеризують початок першого етапу розвитку методів планування експерименту. Ним був розроблений метод факторного планування. Його розробив для цього просту обчислювальну схему. Факторне планування отримало широке розповсюдження, але його використання вимагає постановки великої кількості дослідів.

В 1945 р. Д.Фінн запропонував дробові репліки факторного експерименту. Це дозволило скоротити кількість експериментальних досліджень і розширило перелік галузей застосування планування. В 1946 р. Р. Планкет і Д.Берман шляхом насичення факторних планів запропонували ще скоротити обсяг експериментальних досліджень.

В 1951 р. Дж.Бокс і К.Уілсон розпочали новий етап розвитку планування експерименту. Їх робота узагальнила попередній досвід і запропонувала послідовне експериментальне визначення оптимальних умов процедур з використанням оцінок коефіцієнтів методом найменших квадратів, руху за градієнтом і пошуку інтерполяційного поліному в області екстремуму функції відгуку («квазістаціонарній»).

З 1954 р. Дж.Бокс і П.Юл показали, що планування експерименту можна використовувати при дослідженні фізико-хімічних процесів, якщо попередньо сформульовані одна чи декілька гіпотез. Разом з тим кінетику таких процесів можна описувати за допомогою диференціальних рівнянь. Такий детерміністичний підхід є до певної міри альтернативним статистичним моделям.

Дж.Бокс і Дж. Хантер сформулювали принцип ротобабельності для описання квазістаціонарної області, яка бурхливо розвивається сьогодні. Вони показали можливість планування із розбиттям на ортогональні блоки. Подальшим розвитком цієї ідеї було планування, ортогональне до неконтрольованого часового дрейфу, що значно розширює можливості експериментатора.

В СРСР роботи щодо планування експерименту розпочаті в 1960 р. під керівництвом В. В. Налимова.

1.2 Загальні положення

Найчастіше експеримент полягає у вирішенні двох задач:

- першу називають *екстремальною*. Вона полягає у відшуканні умов процесу, які забезпечують отримання оптимального значення вибраного параметра. Її ознакою є вимога пошуку екстремуму певної функції. Експерименти, що ставлять для задач оптимізації, називають екстремальними;
- друга задача *інтерполяційна*. Вона полягає у побудові інтерполяційної формули для передбачення значень параметра, що вивчається і залежить від певних факторів.

Для розв'язання екстремальної або інтерполяційної задачі потрібно мати математичну модель досліджуваного об'єкта. Її отримують в результаті експериментальних дослідів. При дослідженні багатофакторного процесу, який виявляється в більшості ситуацій, проведення всіх можливих досліджень пов'язано із надзвичайно великою трудомісткістю, оскільки це пов'язано із кількістю всіх можливих експериментів. Задача планування полягає у встановленні мінімально необхідної кількості дослідів та умов їх проведення, у виборі методів математичного оброблювання результатів і прийнятті рішень. Окремим випадком планування екстремального експерименту, тобто процес вибору кількості та умов проведення дослідів, мінімально необхідних для знаходження показників для екстремальних експериментів за допомогою методу Бокса-Уілсона, який ще називають методом крутого сходження. Суть метода полягає у проведенні дослідів невеликими серіями. У кожній серії одночасно змінюють всі фактори за певними умовами. Дослідження проводяться таким чином, щоб за висновками математичної обробки результатів попередньої серії планувати наступну серію досліджень.

Найчастіше використовується наступне визначення: *експеримент* – метод пізнання, за допомогою якого при контрольованих умовах досліджується явище або процес дійсності. Сукупність досліджень об'єднується єдиною метою та спільною системою обмежень та припущень у просторі та часі. При цьому експерименти розподіляються на:

- *якісний*, який проводиться з метою виявлення наявності чи відсутності у об'єкта певних властивостей чи характеристик;

- **вимірювальний**, який проводиться з метою визначення кількісних значень параметрів чи характеристик досліджуваного об'єкта;
- **пасивний**, коли ставиться велика серія дослідів із почерговою зміною факторів впливу. Він є традиційним;
- **активний**, коли дослідження передбачають одночасну зміну всіх параметрів, які впливають на процес, і ставиться за попередньо складеним планом експерименту.

При **натурних** експериментах дослідник має справу безпосередньо з досліджуваним об'єктом чи явищем. При **модельних** об'єкт дослідження замінюється його моделлю (певною подібністю оригіналу, який зберігає його суттєві властивості при певних обмеженнях для другорядних).

Будь-який планування і здійснення експерименту можуть бути розподілені на певні основні етапи:

- постановка задачі (визначення мети експерименту, виявлення початкової ситуації, оцінка необхідних використовуваних засобів та витрат, встановлення типу задачі);
- збирання апріорної інформації щодо досліджуваного об'єкту (огляд джерел, опитування фахівців тощо);
- вибір способу розв'язання задачі та її реалізації (визначення типу моделі, визначення і обмеження можливих впливових факторів, виявлення контрольованих та неконтрольованих інформативних параметрів, вибір цільової функції);
- перевірка вибраного способу розв'язання задачі (проведення експериментів з метою визначення працездатності методики експерименту, попередня оцінка адекватності отриманої моделі);
- реалізація вибраного алгоритму розв'язання задачі (уточнення умов проведення експерименту; корегування цільової функції, факторів, контрольованих та неконтрольованих інформативних параметрів; визначення обсягів вибірки, кратності повторення експерименту);

- оброблювання і аналіз результатів, висновки і рекомендації (отримання необхідних для дослідника показників, оцінка їх вірогідності, переведення їх до форми, придатної для подальших досліджень).

Плануванням експерименту називають процедуру вибору кількості, послідовності та умов постановки дослідів, необхідних і достатніх для досягнення мети експерименту із потрібною точністю. Теорія планування експерименту дозволяє при мінімальній кількості дослідів отримати математичну модель процесу і визначити шляхи його протікання.

В узагальненому випадку об'єкт досліджень можна подати у вигляді структури «чорного ящика» (рис. 1.3). Його стан можна описати рівнянням

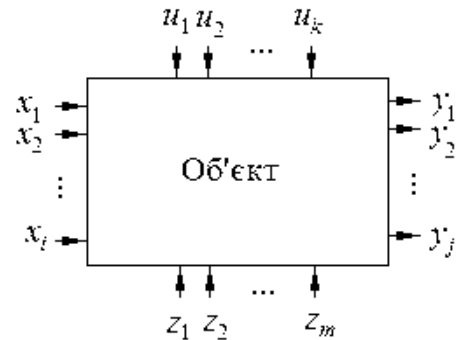


Рис. 1.3. Узагальнена структура об'єкта досліджень

$$Y = f(X, U, Z), \quad (1.1)$$

де $Y = (y_1, y_2, \dots, y_j)$ – контрольовані або обчислювані параметри, які ще називають змінними стану або функціями відгуку;

$U = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ – контрольовані збуджувальні впливи, які не припускають цільової зміни під час досліджень;

$Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ – неконтрольовані збуджувальні впливи, які невідомі досліднику і повільно змінюються в часі випадковим чином;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ – незалежно контрольовані вхідні змінні, які під час експерименту можна змінювати цільовим чином.

Виходячи з цього однією з основних задач експерименту є встановлення взаємозв'язків між вхідними і вихідними параметрами об'єкта у кількісному вигляді, який називається **математичною моделлю**. Вона являє собою сукупність рівнянь, умов і алгоритмічних

правил, що дозволяє отримати інформацію щодо процесів, які протікають в об'єкті. Це передбачає його аналіз, а також управління ним.

Вхідні параметри, які впливають на стан об'єкту і можуть бути визначені кількісно, називають **факторами**. Зрозуміло, що під час планування активного експерименту фактори повинні бути незалежними і піддаватися управлінню. Кожен з факторів має власну область визначення, яка повинна бути визначена до початку експерименту. Вона може бути неперервною або дискретною, причому в першому випадку здійснюють її штучну дискретизацію. Кожний з параметрів може змінюватися в певних межах

$$\begin{cases} x_{iH} \leq x_i \leq x_{iB}, \\ u_{kH} \leq u_k \leq u_{kB}, \\ z_{mH} \leq z_m \leq z_{mB}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Вихід хоча б одного з цих параметрів за ці межі призводить до порушення працездатності системи чи нормального протікання процесу. Задача дослідника полягає в тому, щоб при фіксованих значеннях $u_k = const$ та $z_m = const$ знайти в межах робочої зони таке значення факторів $x_i = var$, при яких вихідні параметри y_j набувають оптимального або заданого значення. Таким чином цільова функція описується рівнянням

$$Y_j = f(x_i = var, u_k = const, z_m = const) \quad (1.3)$$

в області працездатності факторів x_i .

Об'єкт дослідження може мати декілька змінних стану, кількість яких треба скоротити до мінімуму. Практичний досвід показує, що в більшості випадків вдається обмежитися однією змінною стану. При цьому вектор \mathbf{Y} вироджується на скаляр y . Якщо досягти цього неможливо, експеримент потрібно проводити по кожній зі змінних стану y_i , після чого вирішувати всі інші задачі. Під час **вибору змінних стану** необхідно враховувати певні умови. Так, вона повинна бути:

- інформативною, тобто характеризувати один зі станів об'єкту;
- вимірюваною, тобто мати кількісну характеристику;

- статистично стійкою, тобто якнайменшу дисперсію під час проведення дослідів.

При **виборі факторів** теж потрібно враховувати певні умови:

- фактор повинен бути регульованим, тобто його можна змінювати від значення x_H до x_B ;
- точність вимірювання фактору і управління ним повинна бути відомою і достатньо високою (хоча б на порядок вищою від точності вимірювання функції стану), інакше відтворюваність результатів експерименту стає проблематичною.

До факторів і змінних стану також пред'являються **спільні вимоги**:

- фактори і змінні стану повинні мати області визначення, які задаються певними логічними обмеженнями (не можна температуру живої людини задавати в межах 20 – 50°C), причому ці області повинні бути такими, щоб при будь-яких комбінаціях факторів, функції стану не виходили за межі своїх областей визначення;
- між змінними стану і факторами повинен бути однозначний зв'язок для того, щоб можна було побудувати математичну модель і досягти мети проведення експерименту.

Експеримент завжди повинен бути спрямований на досягнення конкретної мети, яка зумовлює умови його планування. До основних типових можна віднести:

- ✓ оцінювання певних характеристик досліджуваного об'єкта, які виявляють себе статистично, а також перевірка певних гіпотез щодо цих характеристик. Це відноситься до **вимірювальних процесів**;
- ✓ виявлення впливу певних факторів на вихідну величину у вигляді відповіді «так» чи «ні». Прикладом може бути визначення чи впливає вік хворого на ефективність використання ліку. Така експериментальна процедура називається **дисперсійним аналізом**;
- ✓ встановлення функції відгуку, тобто побудова математичної моделі, яка статистично вірогідно пов'язує реакцію вихідних параметрів із вхідними факторами, що передбачає **регресійний аналіз**;

- ✓ визначення рівня взаємного статистичного зв'язку двох величин, наприклад віку хворого і терміну його реабілітації при використанні конкретних ліків, що називається **кореляційним аналізом**;
- ✓ знаходження значень вхідних факторів для досягнення оптимальних або чітко визначених вихідних параметрів, що в чистому вигляді підпадає під **екстремальний експеримент**.

1.3 Алгоритм планування і здійснення повного факторного експерименту

Планування експерименту. В реальних умовах стан об'єкту завжди відчуває певні зміни завдяки контрольованим u_k та неконтрольованим z_m збуджувальним впливам. Крім цього за їх рахунок змінюються фактори x_i . Зрозуміло, що при цьому будуть змінюватися функції стану y_j . Якщо кожну зміну розглядати як окремий експеримент і оброблювати їх сукупність методом найменших квадратів, можна отримати певну математичну модель. Такий підхід отримав назву **пасивного експерименту**. Його перевагою є практична відсутність витрат на дослід. Дані просто реєструються. Але за нормальних умов коливання стану малі, і зареєстровані значення знаходяться близько одна від одної, що зумовлює великий вплив випадкових похибок. Тобто, кінцеві результати експерименту (коефіцієнти кореляції, регресії тощо) оцінюють із значними помилками. Також, при пасивному експерименті фактори сильно корельовані. Це ускладнює відокремлення впливу кожного окремого фактора на стан об'єкту в цілому. Крім цього, в реальних умовах фактори часто змінюються із помітними помилками, що ставить під сумнів коректність застосування класичного методу найменших квадратів. В зв'язку з цим, на практиці, будь-який експеримент, при плануванні якого не враховуються статистичні оцінки, називають пасивним.

Зрозуміло, що виникають ситуації, коли необхідно обмежуватись лише пасивним експериментом, але якщо тільки можливо потрібно планувати **активний (екстремальний) варіант**.

Проміжним результатом такого експерименту є математична модель об'єкта дослідження у вигляді поліноміального рівняння

$$y = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{i \neq c} \beta_i \beta_c x_i x_c + \sum_{i=c} \beta_i \beta_c x_i x_c, \quad (1.4)$$

за умови, що об'єкт характеризується однією змінною стану, яку називають рівнянням регресії.

Оброблювання експериментальних даних. До того, як розпочинати планування експерименту, необхідно пересвідчитись, що досліди відтворювані. Для цього проводиться N серій з K паралельних дослідів у визначеній області зміни впливових факторів, результати яких заносяться до таблиці:

Таблиця 1.1. Оцінка відтворюваності результатів дослідів

Номер серії дослідів	Результати паралельних дослідів				$y_{i.cep}$	σ_i^2
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	$y_{1.cep}$	σ_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	$y_{2.cep}$	σ_2^2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
N	y_{N1}	y_{N2}	...	y_{Nk}	$y_{N.cep}$	σ_N^2

Після цього визначається середнє арифметичне значення відгуку для кожної серії дослідів

$$y_{n.cep} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{b=1}^k y_{nb} \quad (1.5)$$

та дисперсії

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{b=1}^k (y_{nb} - y_{n.cep})^2, \quad (1.6)$$

після чого розраховується значення критерію Кохрена

$$G_p = \frac{\max \{\sigma_n^2\}}{\sum_{n=1}^N \sigma_n^2}. \quad (1.7)$$

За спеціальною таблицею визначають табличне значення Кохрена – G_T . Воно залежить від довірчої імовірності p (зазвичай $p = 0.95$) від N та k .

Таблиця 1.2. Критичні значення коефіцієнта Кохрена (G-критерія) для довірчої імовірності $p = 95\%$ і кількості степеней свободи N

Кількість дослідів, k	Кількість степеней свободи, N										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Всі значення G-критерію менші одиниці, тому в таблиці наведені лише десяткові знаки після коми, перед якої при користуванні таблицею потрібно ставити нуль цілих.

Якщо виконується умова $G_p \leq G_T$, то досліди можна вважати відтворюваними. Похибка експерименту визначається дисперсією відтворюваності

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_n^2, \quad (1.8)$$

з якою пов'язана кількість степеней свободи $N(k - 1)$.

Повний факторний експеримент. В послідовності реалізації планів можна виділити окремі етапи:

- оцінка апріорної інформації і відокремлення факторів, несуттєвих для конкретного об'єкту досліджень;
- отримання математичної моделі об'єкта у вигляді лінійної функції відгуку;
- пошук оптимальної області працездатності об'єкта за лінійною функцією відгуку;

- визначення області оптимуму для нелінійної функції відгуку математичної моделі об'єкта дослідження;
- пошук оптимальної координати факторного простору у знайдений області.

Екстремальний експеримент для даного випадку завершується визначенням оптимальної координати, яка відповідає оптимальним умовам стану об'єкта дослідження.

Якщо на об'єкт впливають багато факторів, як це буває найчастіше в реальних ситуаціях, можливі два підходи до досліджень таких систем. В першому випадку експеримент розбивається на серії, в кожній з яких варіюється лише один фактор при незмінності всіх інших. Його головною перевагою є наочність і легкість аналізу результатів для кожної серії дослідів. При другому методі є побудова плану експерименту зі зміною всіх впливових факторів, але за умови максимуму точності відслідковування реакції об'єкту, утримання мінімальної кореляції між факторами та збереження статистичної стійкості. Такий експеримент називають **багатофакторним**. Але цей підхід є більш ефективним, хоча і більш трудомістким на початковій стадії. Для формування плану експерименту формується матриця планування, в якій рядки відповідають умовам певного дослідів, а стовпці – параметрам незалежних змінних при різних дослідів. Повним **факторним експериментом** є система дослідів, яка враховує всі можливі комбінації всіх рівнів факторів за умови знаходження функцій стану в

межах областей визначення.

Таблиця 1.3. Матриця планування експерименту

Номер дослідів	Фактори			Функція відгуку
	x_1	x_2	x_3	
1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	y_2
3	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	-1	y_4
5	-1	-1	+1	y_5
6	+1	-1	+1	y_6
7	-1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	y_8

Для спрощення обчислень коефіцієнтів регресії всі фактори під час повного факторного експерименту визначають на двох рівнях: нижньому $x_{iH} = -1$ та верхньому $x_{iB} = +1$. Для прикладу в таблиці наводяться умови дослідів повного трифазного експерименту (табл. 1.3).

Оскільки кожен фактор

може приймати лише два значення, то загальна кількість експериментів дорівнює $2^{N \cdot k}$.

Приклад. В чотирьох дослідках досліджується тиск і температура людини (3 фактори). При цьому фіксуються верхній та нижній рівні факторів. Граничні параметри подані у табл. 1.4. Матриця планування експерименту для цього випадку має вигляд, наведений у табл. 1.5.

Таблиця 1.4. *Приклад.* Таблиця параметрів

	Тиск		Пульс
Основний рівень	130	80	110
Інтервал варіювання	50	40	70
Верхній рівень	180	120	180
Нижній рівень	80	40	40

З таблиці зрозумілі основні принципи побудови матриць планування повного факторного експерименту (в першому стовпчику нижнє і верхнє значення змінюються через одне, у другому – через два, у третьому – через чотири тощо). Базова матриця повного факторного експерименту повинна підпорядковуватися певним властивостям

Таблиця 1.5. *Приклад.*
Матриця планування експерименту

№ п/п	Тиск		Пульс
1	100	40	40
2	180	40	40
3	100	120	40
4	180	120	40
5	100	40	180
6	180	40	180
7	100	120	180
8	180	120	180

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K x_{ki} = 0 \\ \sum_{k=1}^K x_{ki}^2 = K \\ \sum_{k=1}^K x_{ik} x_{ik} = 0 \end{array} \right. , \quad (1.9)$$

де k – номер дослідку;

i – номер фактору.

Останнє рівняння у системі (1.9) визначає ортогональність матриці. Це дозволяє визначити коефіцієнти регресії за достатньо тими формулами. Разом з тим, таблиці 1.4 та 1.5 містять суттєву помилку. Артеріальний тиск складається з двох складових (систоличної

Таблиця 1.6. Приклад. Модифікована таблиця параметрів

	Тиск	Пульс	Температура
Основний рівень	130	110	39
Інтервал варіювання	50	70	3
Верхній рівень	180	180	42
Нижній рівень	80	40	36

Таблиця 1.7. Приклад. Модифікована матриця планування експерименту

№ п/п	Тиск	Пульс	Температура
1	100	40	36
2	180	40	36
3	100	180	36
4	180	180	36
5	100	40	42
6	180	40	42
7	100	180	42
8	180	180	42

та діастолічної), але вони між собою корельовано. Тому потрібно або виключати з факторів одну зі складових, або вводити іншу. Для прикладу доцільно застосувати другий шлях. Тоді таблиці будуть модифіковані. Таблиця 1.3 в

явному вигляді придатна лише для побудови лінійної моделі. Більш складним випадком є той, коли передбачається, що модель нелінійна (як це відповідає більшості ситуацій). При цьому доводиться враховувати взаємодію факторів, вводячи додаткові стовпці. Додатковий стовпчик x_0 є ознакою фіктивної змінної і призначений для розрахунку постійної складової. Тоді рівняння

регресії в загальному вигляді буде мати вигляд (1.10). Коефіцієнти β визначаються відповідно до табл. 1.8.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (1.10)$$

Таблиця 1.8. Матриця планування експерименту з урахуванням взаємодії факторів

Номер досліду	Фактори та їх взаємодія								Функція відгуку
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 y_j; \\ \beta_1 = \frac{1}{8} (x_{1H} y_1 + x_{1B} y_2 + x_{1H} y_3 + x_{1B} y_4 + x_{1H} y_5 + x_{1B} y_6 + x_{1H} y_7 + x_{1B} y_8); \\ \beta_2 = \frac{1}{8} (x_{2H} y_1 + x_{2H} y_2 + x_{2B} y_3 + x_{2B} y_4 + x_{2H} y_5 + x_{2H} y_6 + x_{2B} y_7 + x_{2B} y_8); \\ \beta_3 = \frac{1}{8} (x_{3H} y_1 + x_{3H} y_2 + x_{3H} y_3 + x_{3H} y_4 + x_{3B} y_5 + x_{3B} y_6 + x_{3B} y_7 + x_{3B} y_8); \\ \beta_{12} = \frac{1}{8} (x_{1B} x_{2B} y_1 + x_{1H} x_{2H} y_2 + x_{1H} x_{2H} y_3 + x_{1B} x_{2B} y_4 + x_{1B} x_{2B} y_5 + \\ + x_{1H} x_{2H} y_6 + x_{1H} x_{2H} y_7 + x_{1B} x_{2B} y_8); \\ \beta_{13} = \frac{1}{8} (x_{1B} x_{3B} y_1 + x_{1H} x_{3H} y_2 + x_{1B} x_{3B} y_3 + x_{1H} x_{3H} y_4 + x_{1H} x_{3H} y_5 + \\ + x_{1B} x_{3B} y_6 + x_{1H} x_{3H} y_7 + x_{1B} x_{3B} y_8); \\ \beta_{23} = \frac{1}{8} (x_{2B} x_{3B} y_1 + x_{2B} x_{3B} y_2 + x_{2H} x_{3H} y_3 + x_{2H} x_{3H} y_4 + x_{2H} x_{3H} y_5 + \\ + x_{2H} x_{3H} y_6 + x_{2B} x_{3B} y_7 + x_{2B} x_{3B} y_8); \\ \beta_{123} = \frac{1}{8} (x_{1H} x_{2H} x_{3H} y_1 + x_{1B} x_{2B} x_{3B} y_2 + x_{1B} x_{2B} x_{3B} y_3 + x_{1H} x_{2H} x_{3H} y_4 + \\ + x_{1B} x_{2B} x_{3B} y_5 + x_{1H} x_{2H} x_{3H} y_6 + x_{1H} x_{2H} x_{3H} y_7 + x_{1B} x_{2B} x_{3B} y_8). \end{array} \right.$$

(1.11)

Після розрахунку коефіцієнтів регресії потрібно визначити ступінь їх значимості, Всі коефіцієнти розподіляються на значущі та незначущі. Для оцінки значимості коефіцієнтів регресії порівнюється похибка обчислення із похибкою експериментальних даних σ_y^2 . При цьому обчислюється довірчий інтервал $\Delta\beta_i$ згідно (1.12).

$$\Delta\beta = \pm t_T \sigma_y^2, \quad (1.12)$$

де t_T – табличне значення коефіцієнта Стюдента, яке знаходиться за кількістю степенів свободи і довірчої імовірності.

Таблиця 1.9. Критичні значення коефіцієнта Стюдента для різної довірчої імовірності

f	p							
	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999

1	3.0770	6.3130	12.7060	31.820	63.656	127.656	318.306	636.619
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.964	9.924	14.089	22.327	31.599
3	1.6377	2.35340	3.182	4.540	5.840	7.458	10.214	12.924
4	1.5332	2.13180	2.776	3.746	4.604	5.597	7.173	8.610
5	1.4759	2.01500	2.570	3.649	4.0321	4.773	5.893	6.863
6	1.4390	1.943	2.4460	3.1420	3.7070	4.316	5.2070	5.958
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.2293	4.785	5.4079
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.832	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.780
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.363	1.795	2.201	2.718	3.105	3.496	4.024	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.08600	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495
21	1.3230	1.7200	2.2.0790	2.5170	2.8310	3.1350	3.5270	3.8190
22	1.3212	1.7117	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7251
26	1.315	1.705	2.059	2.478	2.778	3.0660	3.4360	3.7060
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0360	3.3962	3.8494
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460
32	1.3080	1.6930	2.0360	2.4480	2.7380	3.0140	3.3650	3.6210
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.9520	3.3479	3.6007
36	1.3050	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	9.490	3.3326	3.5821
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.9808	3.3190	3.5657
40	1.303	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.9712	3.3069	3.5510
42	1.320	1.682	2.018	2.418	2.6980	2.6930	3.2960	3.5370
44	1.301	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	3.9555	3.2861	3.5258
46	1.300	1.6767	2.0129	2.4102	2.6870	3.9488	3.2771	3.5150
48	1.299	1.6772	2.0106	2.4056	2.6822	3.9426	3.2689	3.5051

50	1.298	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.9370	3.2614	3.4060
55	1.2997	1.673	2.0040	2.3960	2.6680	2.9240	3.2560	3.4760
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.9146	3.2317	3.4602
65	1.2947	1.6686	1.997	2.3851	2.6536	3.9060	3.2204	3.4466
70	1.2938	1.6689	1.9944	2.3808	2.6479	3.8987	3.2108	3.4350
80	1.2820	1.6640	1.9900	2.3730	2.6380	2.8870	3.1950	3.4160
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3885	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905
120	1.2888	1.6577	1.9719	2.3578	2.6174	2.8598	3.1595	3.3735
150	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090	2.8482	3.1455	3.3566
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	2.8385	3.1315	3.3398
250	1.2849	1.6510	1.9695	2.3414	2.5966	2.8222	3.1232	3.3299
300	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	2.8279	3.1176	3.3233
400	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	2.8227	3.1107	3.3150
500	1.2830	1.6470	1.9640	2.3330	2.7850	2.8190	3.1060	3.3100

При цьому f – кількість незалежних випадкових величин

Якщо виконується умова $|\beta_i| > |\Delta\beta_i|$, то i -тий коефіцієнт визнається значущим. Незначущі коефіцієнти відкидаються з рівняння регресії (1.10), після чого воно набуває остаточного вигляду. Це рівняння перевіряється на адекватність. При цьому досліди повторюються r разів і визначають дисперсію адекватності

$$\sigma_{ad}^2 = \frac{r}{N - g} \sum_{i=1}^N (\overline{y_{id}} - \overline{y_{ip}})^2, \quad (1.13)$$

де $\overline{y_{id}}$ – середнє арифметичне функції відгуку з r_i паралельних дослідів;

$\overline{y_{ip}}$ – середнє арифметичне функції відгуку, розраховане за рівнянням при i -тому досліді.

Для перевірки адекватності потрібно перевірити рівняння регресії за критерієм Фішера

$$F = \frac{\sigma_{ad}^2}{\sigma_{y2}}, \quad (1.14)$$

при цьому кількість степеней свободи $d.f_1 = N - g$ та $d.f_2 = N(r - 1)$, за якими знаходять критичне значення F_T . За умови $F \leq F_T$ математичне описання функції відгуку рівняння регресії можна вважати адекватним.

Таблиця 1.10. Значення критерію Фішера для рівня значимості $p = 0.05$

	f_1										
f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20

Під час планування експерименту обов'язково потрібно враховувати **модель експерименту**. Для порівняння можна розглянути експеримент, який ставиться і в реальному житті. Нехай потрібно визначити якусь характеристику крові у піддослідних тварин. Таким чином фіксованим фактором X_i є метод дослідження з I рівнями розподілу, а залежною змінною Y – характеристика крові, що контролюється (рис. 1.4).

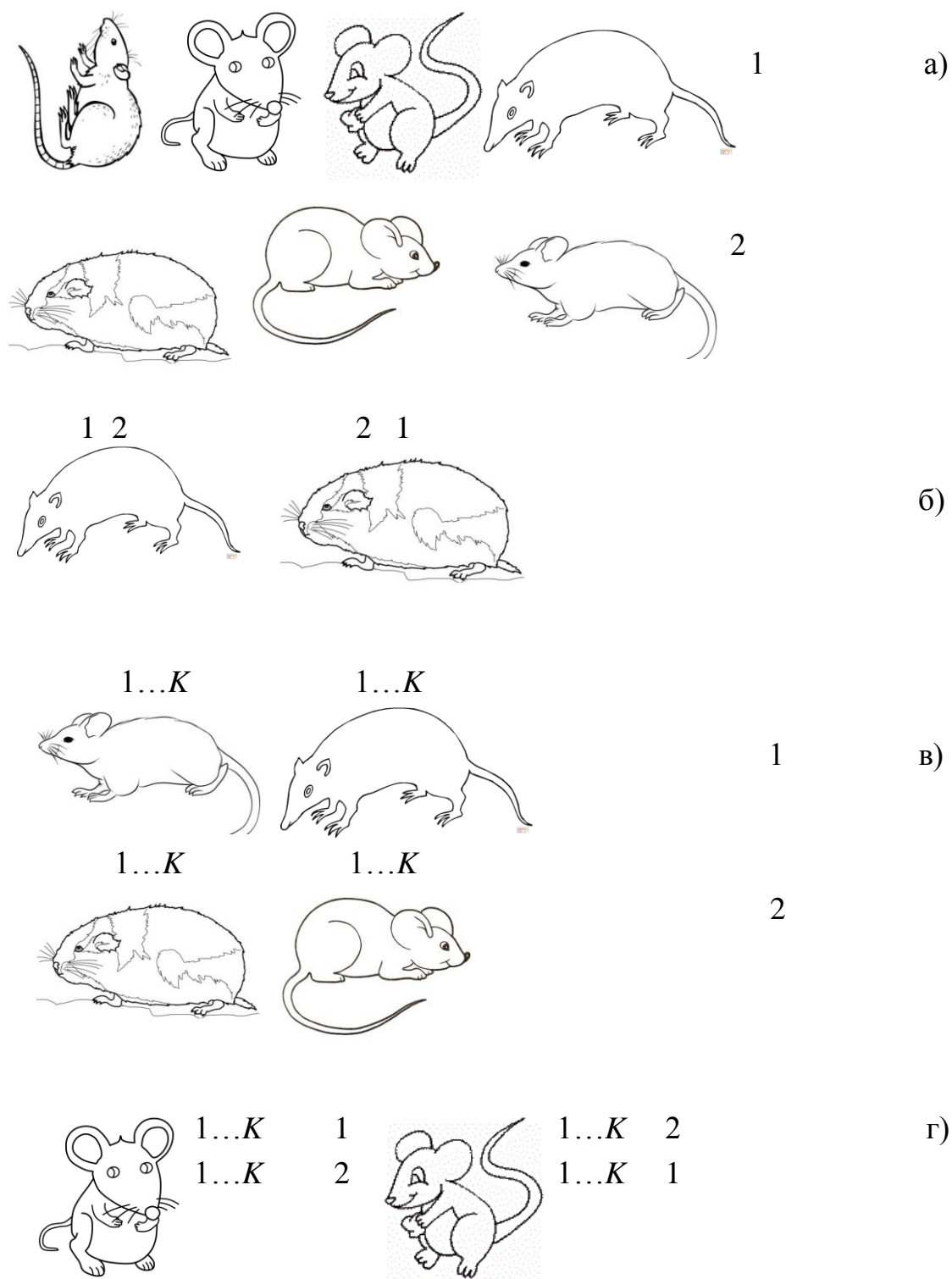


Рисунок 1.4 – Порівняння моделей експерименту

а – однофакторний ($I = 2, J_1 = 4, J_2 = 3$);

б – рандомізованих блоків ($I = 2, J = 2$);

в – із групуванням ($I = 2, J = 2, K$ вимірювань);

г – повторюваний багатфакторний ($I = 2, J = 2, K$ вимірювань).

В першому випадку складається *однофакторний план*. При цьому для i -того методу досліджується J_i тварин, де $i = 1, 2, \dots, I$. і вимірюється характеристика крові кожної тварини. При цьому групи J_i тварин для різних i не обов'язково повинна бути однаковою. Це найпростіший варіант, але він містить методичну похибку, оскільки не враховує особливостей кожної тварини.

Тому цей план може виявитись неефективним і не виявити всіх особливостей експерименту. Дещо цього недоліку можна позбутися по можливості підбираючи однакових тварин.

План рандомізованих блоків полягає в тому, що метод дослідження є фіксованим фактором, а самих тварин – випадковим. При цьому вибирається J тварин, і для кожної з них проводиться I досліджень у випадковому порядку. Перевагою є те, що весь комплекс досліджень проводиться для кожної тварини, але результати можуть бути залежні. Для уникнення цього потрібно витримувати досить великі інтервали часу між окремими експериментами.

Для *плану з групуванням* випадковий фактор підпорядковується фіксованому. Тобто випадкова група з J тварин піддається першому методу, друга (така сама за кількістю) – другому тощо. Фактично це нагадує однофакторний план, для уникнення чого експерименти потрібно незалежно повторювати K разів, визначаючи характеристику Y . Цей план набагато кращий, оскільки дозволяє оцінити різницю між тваринами, між методами та оцінити похибки вимірювання.

При *повторюваному багатфакторному плані* проводиться перекресний експеримент між фіксованими і випадковими факторами. Для кожного з J тварин проводиться I досліджень, причому для кожної комбінації $J - I$ проводиться K вимірювань характеристики Y . План нагадує рандомізованих блоків, але як і попередній дозволяє отримати максимум інформації. Але його недолік такий самий, пов'язаний із залежністю експериментів.

Визначення обсягу вибірки при плануванні експерименту.

На практиці необхідно визначати кількість дослідів, яку необхідно здійснити. Однією з головних задач в цьому випадку є зв'язок довжини реалізації і точності. При цьому користуються імовірісно-

статистичним підходом. Згідно центральної граничної теореми теорії імовірностей при достатньо великій кількості дослідів n можна припустити, що закон розподілу випадкової величини X є нормальним із параметрами $m_X = a$ та σ_X . Для допустимого значення імовірності p_{don} за таблицею інтеграла Лапласа (інтеграла імовірності) необхідно знайти порогове значення $h_{don} = \frac{\Delta}{\left(\sigma_X / \sqrt{n}\right)}$. Виходячи з величини допуску

$\Delta = |m_X^* - a|$ і відомому значенні σ_X можна визначити необхідний обсяг вибірки за формулою (1.15). Так, для $p_{don} = 0,95$ та $\sigma_X / \Delta = 5$, порогове значення $h_{don} \approx 225$.

$$n \geq \frac{h_{don}^2 \cdot \sigma_X^2}{\Delta^2}. \quad (1.15)$$

Таблиця 1.11. Значення функції Лапласа для повного вигляду $F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
0.00	0.00000	1.00	0.68269	2.00	0.95450	3.00	0.99730
0.01	0.00798	1.01	0.68750	2.01	0.95557	3.01	0.99739
0.02	0.01596	1.02	0.69227	2.02	0.95662	3.02	0.99747
0.03	0.02393	1.03	0.69699	2.03	0.95764	3.03	0.99755
0.04	0.03191	1.04	0.70166	2.04	0.95865	3.04	0.99763
0.05	0.03988	1.05	0.70628	2.05	0.95964	3.05	0.99771
0.06	0.04784	1.06	0.71086	2.06	0.96060	3.06	0.99779
0.07	0.05581	1.07	0.71538	2.07	0.96155	3.07	0.99786
0.08	0.06376	1.08	0.71986	2.08	0.96247	3.08	0.99793
0.09	0.07171	1.09	0.72429	2.09	0.96338	3.09	0.99800
0.10	0.07966	1.10	0.72867	2.10	0.96427	3.10	0.99806
0.11	0.08759	1.11	0.73300	2.11	0.96514	3.11	0.99813
0.12	0.09552	1.12	0.73729	2.12	0.96599	3.12	0.99819
0.13	0.10348	1.13	0.74152	2.13	0.96683	3.13	0.99825
0.14	0.11134	1.14	0.74571	2.14	0.96765	3.14	0.99831
0.15	0.11924	1.15	0.74986	2.15	0.96844	3.15	0.99837
0.16	0.12712	1.16	0.75395	2.16	0.96923	3.16	0.99842
0.17	0.13499	1.17	0.75800	2.17	0.96999	3.17	0.99848
0.18	0.14285	1.18	0.76200	2.18	0.97074	3.18	0.99853

0.19	0.15069	1.19	0.76595	2.19	0.97148	3.19	0.99858
0.20	0.15852	1.20	0.76986	2.20	0.97219	3.20	0.99863
0.21	0.16633	1.21	0.77372	2.21	0.97289	3.21	0.99867
0.22	0.17413	1.22	0.77754	2.22	0.97358	3.22	0.99872
0.23	0.18191	1.23	0.78130	2.23	0.97425	3.23	0.99876
0.24	0.18967	1.24	0.78502	2.24	0.97491	3.24	0.99880
0.25	0.19741	1.25	0.78870	2.25	0.97555	3.25	0.99855
0.26	0.20514	1.26	0.79233	2.26	0.97618	3.26	0.99889
0.27	0.21284	1.27	0.79592	2.27	0.97679	3.27	0.99892
0.28	0.22052	1.28	0.79945	2.28	0.97739	3.28	0.99896
0.29	0.22818	1.29	0.80295	2.29	0.97798	3.29	0.99900
0.30	0.23582	1.30	0.80640	2.30	0.97855	3.30	0.99903
0.31	0.24344	1.31	0.80980	2.31	0.97911	3.31	0.99907
0.32	0.25103	1.32	0.81316	2.32	0.97966	3.32	0.99910
0.33	0.25860	1.33	0.81648	2.33	0.98019	3.33	0.99913
0.34	0.26614	1.34	0.81975	2.34	0.98072	3.34	0.99916
0.35	0.27366	1.35	0.82298	2.35	0.98123	3.35	0.99919
0.36	0.28115	1.36	0.82617	2.36	0.98172	3.36	0.99922
0.37	0.28862	1.37	0.82931	2.37	0.98221	3.37	0.99925
0.38	0.29605	1.38	0.83241	2.38	0.98269	3.38	0.99928
0.39	0.30346	1.39	0.83547	2.39	0.98315	3.39	0.99930
0.40	0.31084	1.40	0.83849	2.40	0.98360	3.40	0.99933
0.41	0.31819	1.41	0.84146	2.41	0.98405	3.41	0.99935
0.42	0.32552	1.42	0.84439	2.42	0.98448	3.42	0.99937
0.43	0.33280	1.43	0.84728	2.43	0.98490	3.43	0.99940
0.44	0.34006	1.44	0.85013	2.44	0.98531	3.44	0.99942
0.45	0.34729	1.45	0.85294	2.45	0.98571	3.45	0.99944
0.46	0.35448	1.46	0.85571	2.46	0.98611	3.46	0.99946
0.47	0.36164	1.47	0.85844	2.47	0.98649	3.47	0.99948
0.48	0.36877	1.48	0.86113	2.48	0.98686	3.48	0.99950
0.49	0.37587	1.49	0.86378	2.49	0.98723	3.49	0.99952
0.50	0.38292	1.50	0.86639	2.50	0.98758	3.50	0.99953
0.51	0.38995	1.51	0.86696	2.51	0.98793	3.51	0.99955
0.52	0.39694	1.52	0.87149	2.52	0.98826	3.52	0.99957
0.53	0.40389	1.53	0.87398	2.53	0.98859	3.53	0.99958
0.54	0.41080	1.54	0.87644	2.54	0.98891	3.54	0.99960
0.55	0.41768	1.55	0.87886	2.55	0.98923	3.55	0.99961

0.56	0.42452	1.56	0.88124	2.56	0.98953	3.56	0.99963
0.57	0.43132	1.57	0.88358	2.57	0.98983	3.57	0.99964
0.58	0.43809	1.58	0.88589	2.58	0.99012	3.58	0.99966
0.59	0.44481	1.59	0.88817	2.59	0.99040	3.59	0.99967
0.60	0.45149	1.60	0.89040	2.60	0.99068	3.60	0.99968
0.61	0.45814	1.61	0.89260	2.61	0.99095	3.61	0.99969
0.62	0.46474	1.62	0.89477	2.62	0.99121	3.62	0.99971
0.63	0.47131	1.63	0.89690	2.63	0.99146	3.63	0.99972
0.64	0.47783	1.64	0.89899	2.64	0.99171	3.64	0.99973
0.65	0.48431	1.65	0.90106	2.65	0.99195	3.65	0.99974
0.66	0.49075	1.66	0.90309	2.66	0.99219	3.66	0.99975
0.67	0.49714	1.67	0.90508	2.67	0.99241	3.67	0.99976
0.68	0.50350	1.68	0.90704	2.68	0.99263	3.68	0.99977
0.69	0.50981	1.69	0.90897	2.69	0.99285	3.69	0.99978
0.70	0.51607	1.70	0.91087	2.70	0.99307	3.70	0.99978
0.71	0.52230	1.71	0.91273	2.71	0.99327	3.71	0.99979
0.72	0.52848	1.72	0.91457	2.72	0.99347	3.72	0.99980
0.73	0.53461	1.73	0.91637	2.73	0.99367	3.73	0.99981
0.74	0.54070	1.74	0.91814	2.74	0.99386	3.74	0.99982
0.75	0.54675	1.75	0.91988	2.75	0.99404	3.75	0.99982
0.76	0.55275	1.76	0.92159	2.76	0.99422	3.76	0.99983
0.77	0.55870	1.77	0.92327	2.77	0.99439	3.77	0.99984
0.78	0.56461	1.78	0.92492	2.78	0.99456	3.78	0.99984
0.79	0.57047	1.79	0.92655	2.79	0.99473	3.79	0.99985
0.80	0.57629	1.80	0.92814	2.80	0.99489	3.80	0.99986
0.81	0.58206	1.81	0.92970	2.81	0.99505	3.81	0.99986
0.82	0.58778	1.82	0.93124	2.82	0.99520	3.82	0.99987
0.83	0.59346	1.83	0.93275	2.83	0.99535	3.83	0.99987
0.84	0.59909	1.84	0.93423	2.84	0.99549	3.84	0.99988
0.85	0.60468	1.85	0.93569	2.85	0.99563	3.85	0.99988
0.86	0.61021	1.86	0.93711	2.86	0.99576	3.86	0.99989
0.87	0.61570	1.87	0.93852	2.87	0.99590	3.87	0.99989
0.88	0.62114	1.88	0.93989	2.88	0.99602	3.88	0.99990
0.89	0.62653	1.89	0.94124	2.89	0.99615	3.89	0.99990
0.90	0.63188	1.90	0.94257	2.90	0.99627	3.90	0.99990
0.91	0.63718	1.91	0.94387	2.91	0.99639	3.91	0.99991
0.92	0.64243	1.92	0.94514	2.92	0.99650	3.92	0.99991

0.93	0.64763	1.93	0.94639	2.93	0.99661	3.93	0.99992
0.94	0.65278	1.94	0.94762	2.94	0.99672	3.94	0.99992
0.95	0.65789	1.95	0.94882	2.95	0.99682	3.95	0.99992
0.96	0.66294	1.96	0.95000	2.96	0.99692	3.96	0.99992
0.97	0.66795	1.97	0.95116	2.97	0.99702	3.97	0.99993
0.98	0.67291	1.98	0.95230	2.98	0.99712	3.98	0.99993
0.99	0.67783	1.99	0.95341	2.99	0.99721	3.99	0.99993

Якщо кількість дослідів N обмежується з певних міркувань, то для визначення обсягу вибірки потрібно користуватися формулою (1.16). При $N = 500$, $p_{\text{дов}} = 0,997$, $\sigma_x / \Delta = 5$, обсяг становить $n \approx 155$.

$$n \approx \frac{h_{\text{дов}}^2 \cdot N}{\frac{(N-1) \cdot \Delta^2}{\sigma_x^2} + h_{\text{дов}}^2}. \quad (1.16)$$

Можна також визначити цей показник за частотою виникнення події k/n , де k – кількість дослідів з n проведених, в яких ця подія відбувалась. Цей параметр можна використати як оцінку шуканої імовірності p . Тобто

$$p\left(\frac{k}{n} < x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k/n}^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{k}{n} - m_{k/n}\right)^2}{2\sigma_{k/n}^2}\right) d\frac{k}{n}. \quad (1.17)$$

При достатньо великих значеннях n

$$p\left(\frac{\frac{k}{n} - m_{k/n}}{\sigma_{k/n}} < \frac{\Delta}{\sigma_{k/n}}\right) = F\left(\frac{n \cdot \Delta}{\sigma_{k/n}}\right). \quad (1.18)$$

Задаючись імовірністю p , можна отримати оцінку k/n

$$p\left(\sqrt{k/n} - p < \Delta\right) = t_{\Delta} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad (1.19)$$

де $t_{\Delta} = \frac{\Delta}{\sigma_{k/n}}.$

З імовірністю більше 0,997

$$\Delta = 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \quad (1.20)$$

Звідки

$$n = 9 \frac{p(1-p)}{\Delta^2} = \frac{0,027}{\Delta^2}. \quad (1.21)$$

Аналогічно можна оцінити довжину реалізації для оцінки за результатами експерименту математичного сподівання випадкової величини

$$p\left(\left|\bar{X} - m_x\right| < \Delta\right) = \frac{t_{\Delta} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.22)$$

Похибка визначення

$$\Delta = \frac{t_{\Delta} \sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.23)$$

Звідки

$$n = \frac{t_{\Delta}^2 \cdot \sigma_x^2}{\Delta^2}. \quad (1.24)$$

При імовірності $p = 0,997$

$$n = \frac{9\sigma_x^2}{\Delta^2}. \quad (1.25)$$

Похибка цього методу для обчислення як імовірності події, так і математичного сподівання пропорційна $\frac{1}{\sqrt{n}}$. А це означає, що зменшення похибки призводить до суттєвого збільшення кількості дослідів. Тобто, зменшення похибки в два рази вимагає збільшення експериментів вчетверо.

Інтерпретація рівнянь регресії є важливим етапом моделювання процесів під час планування і проведення експерименту. Інтер-

претація містить аналіз перш за все впливу окремих факторів та їх взаємодії, а потім особливостей дії функції відгуку в різних частинах факторного простору.

Вплив факторів простіше за все аналізувати за рівнянням першої степені, при якому спочатку враховується знак коефіцієнта регресії, який показує на збільшення чи на зменшення впливає на відгук даний фактор.

Планований експеримент дозволяє також співставити вплив окремих факторів. Зазвичай у традиційних рівняннях регресії значення одного коефіцієнта важко співставляти зі значенням іншого. Фактори, а відповідно і коефіцієнти регресії є розмірними величинами (табл. 1.7), які не порівнюються. У планованому експерименті фактори приведені до безрозмірного кодованого вигляду, причому кожний з них змінюється в однакових межах $-1 - +1$. Тому більше за абсолютною величиною значення прямих коефіцієнтів (для наведеного прикладу $\beta_1 - \beta_3$) означає, що в завданих межах зміна цього фактора впливовіша на відгук ніж інші.

При однаковому знаку прямих коефіцієнтів, можна прогнозувати синергетизм впливу відповідних факторів, спільна дія яких впливає сильніше ніж окрема дія кожного з них.

Якщо знаки прямих коефіцієнтів однакові, а сумісні (для наведеного прикладу $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{123}$) мають протилежний, то кожний окремий фактор впливає сильніше ніж при їх взаємодії.

Література

1. Реброва И.А. Планирование эксперимента / И.А. Реброва – Омск: СиБАДИ, 2010 – 105 с.
2. Осипенко Н.Б. Планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных / Н.Б. Осипенко – Гомель: ГГУ, 2010 – 49 с.
3. Славутский Л.А. Основы регистрации данных и планирования эксперимента / Л.А. Славутский – Чебоксары: ЧГУ, 2006 – 200 с.
4. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов – М.: Машиностроение, 1981 – 184 с.

5. Радченко С.Г. Анализ экспериментальных данных на основе использования многофакторных статистических математических моделей / С.Г. Радченко // Математичні машини і системи, 2005, № 3, с. 102 – 115.
6. Стенина Е.И. Научные исследования в деревообработке / Е.И. Стенина, С.С. Тютиков – Екатеринбург: УГЛТУ, 2009 – 22 с.
7. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование / М.П. Цапенко – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 439 с.
8. Кветний Р.Н. Методи та засоби передавання інформації у проблемно-орієнтованих розподілених комп'ютерних системах / Р.Н. Кветний, А.Я. Кулик – Вінниця: ВНТУ, 2010 – 362 с.

2 Вимірювання фізичних величин і реєстрація даних

Сучасна інформаційно-вимірювальна техніка має сукупність технічних засобів для вимірювання більше ніж 250 різних фізичних величин: електричних, магнітних, теплових, механічних, світлових, акустичних тощо.

На сьогоднішній день в інформаційно-вимірювальній техніці переважного значення набув розвиток засобів вимірювань електричних величин, оскільки вони найбільш придатні для передавання, порівняння, точного відтворення і вимірювання. При цьому неелектричні величини перетворюються на електричні за допомогою первинних перетворювачів.

Різноманітні електричні величини з найбільшою точністю і швидкістю вимірюються цифровими приладами, серед яких поширені вольтметри і частотоміри.

2.1 Основні положення

Вимірювання – знаходження чисельного значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

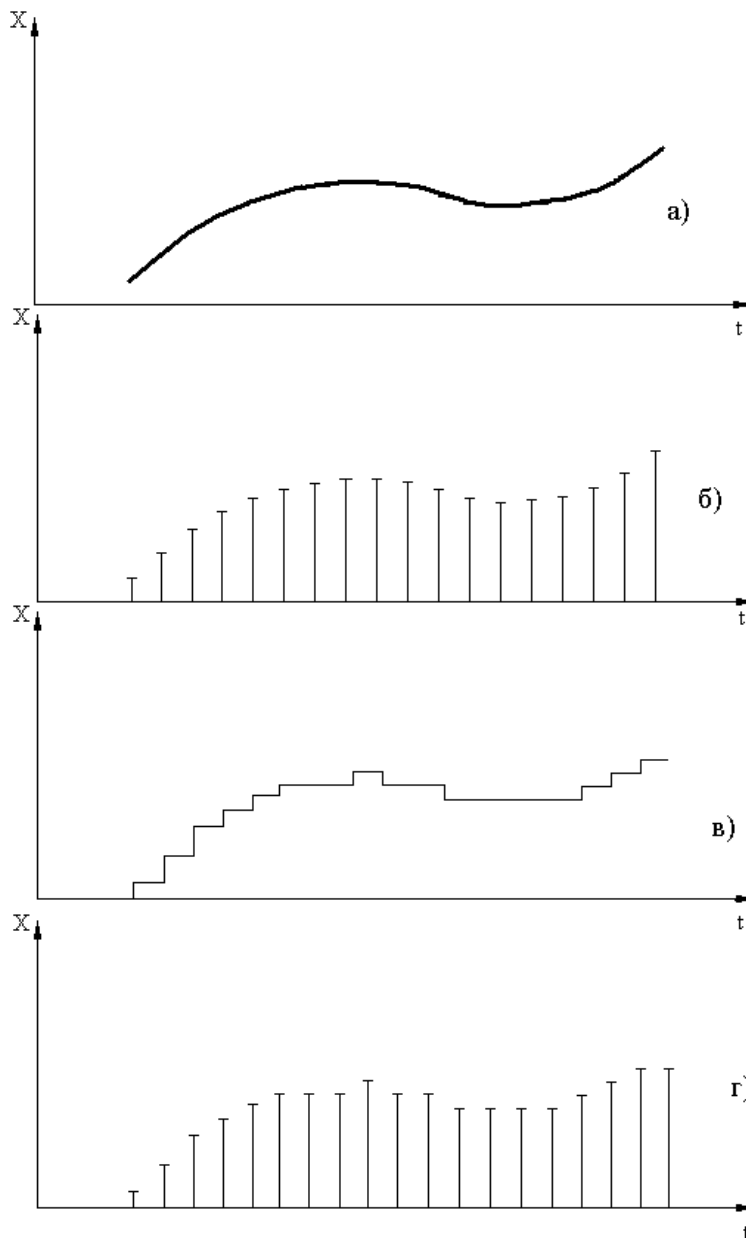
Результатом вимірювання є кількісна характеристика у вигляді іменованого числа. Основною характеристикою якості вимірювання є точність, яка характеризується відповідними показниками. Це довірчі межі, в яких зі встановленою імовірністю знаходиться похибка вимірювань або її систематична складова, оцінка середньоквадратичного відхилення (СКВ) систематичної і випадкової складових похибки, а також щільності ймовірності систематичної і випадкової складових.

Контроль – процедура встановлення відповідності між станами, властивостями об'єкта контролю і завданою нормою шляхом сприйняття контрольованих величин, співставлення їх із уставками і формування висновку.

Норма – допустима область у просторі станів об'єкту.

Результатом контролю є якісна характеристика – висновок щодо знаходження об’єкта контролю в нормі або поза нормою (справний або несправний).

Рахування – процедура визначення чисельного значення дискретної величини або кількості предметів у даній їх сукупності.



а – неперервний;
 б – дискретний за часом і неперервний за рівнем;
 в – неперервний за часом та дискретний за рівнем;
 г – дискретний.

Рисунок 2.1 – Типи фізичних процесів та сигналів

Фізичний процес є рухомою матерією і ризується багатомірною інтенсивністю, а також довжиною в часі і просторі. За характером координати інтенсивності фізичні процеси розподіляються на неперервні в часі, просторі та дискретні в часі, просторі. Зазвичай у макросвіті фізичні процеси неперервні, а дискретні створюються штучно для досягнення певної мети.

Сигналом в загальному випадку є матеріальне втілення інформації у вигляді певного фізичного процесу (наприклад зміна електричної напру-

ги в часі). Сигнали бувають випадкові та детерміновані, неперервні та дискретні, періодичні та неперіодичні.

Детермінованість – властивість, яка означає визначеність, однозначність результату описуваного процесу при заданих початкових даних.

Наведена класифікація до певної міри умовна, оскільки сигнал може бути неперервним лише на певному кінцевому інтервалі часу. Детерміновані сигнали можна розглядати в ідеалізованому вигляді, оскільки у реальних лініях зв'язку на детермінований сигнал накладаються завади, які мають випадковий характер. Це саме стосується і періодичності сигналів. Але з урахуванням певних обмежень, сигнали можна розглядати у відповідності із наведеною класифікацією.

В *неперервних сигналах* (рис. 2.1) міститься вимірювальна інформація щодо інтенсивності величини або неперервно змінюваного часового, просторового параметра або частотного. Параметри неперервних сигналів безпосередньо є об'єктом вимірювань. У *дискретних або кодованих сигналах* міститься штучно або природно закодована щодо певних діапазонів розмірів даної величини. Прикладами штучних кодових сигналів є логічні рівні «нуля» та «одиниці», які широко використовуються в цифровій електронній техніці. Природно кодованими сигнали є генетичні, які містять інформацію щодо кількості і розташування груп та елементів ДНК.

Квантування величини – процедура створення сигналу, абсолютні чи відносні розміри параметрів якого мають обмежену кількість значень. Процедура реалізується за допомогою міри або масштабованого перетворювача.

Крок квантування q_x – різниця між двома найближчими значеннями квантованої величини.

Квантована величина в функції часу може бути виражена у вигляді одиничної ступінчастої функції, яка дорівнює одиниці при додатному аргументі і нулю – при від'ємному.

$$X_{кв}(t) = N_i(t_{N_i}) \cdot q_x \cdot 1(t - t_{N_i}). \quad (2.1)$$

Квантування може здійснюватися із рівномірним або нерівномірним кроком. Під час вимірювань здебільшого використовується рівномірний. *Природно квантована величина* є сукупністю однакових елементів, розмір параметра яких однаковий і дорівнює розміру кроку квантування. Така величина може вимірюватися рахуванням елементів. Так, електричний заряд, який складається з електронів із однаковим елементарним зарядом, можна виміряти їх підрахунком. *Штучне квантування* здійснюється завдяки можливості нанесення і виявлення меж кроків і точного дозування. Прикладом може виступати звичайна лінійка – для вимірювання довжини або годинник – для вимірювання часу.

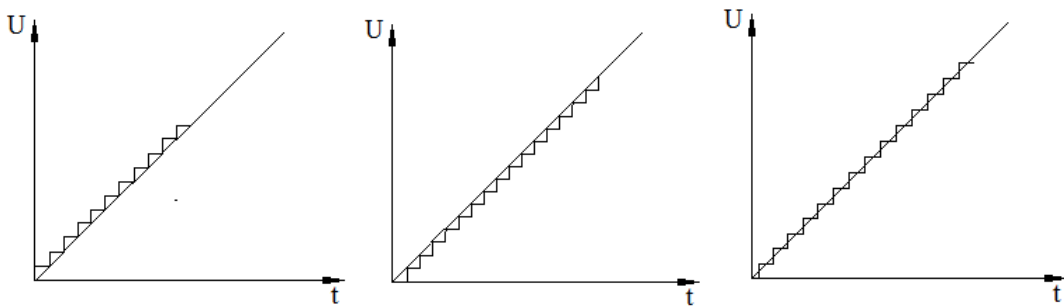


Рисунок 2.2 – Різновиди рівномірного квантування за рівнем

Код – множина комбінацій в деякому алфавіті, поставлена у взаємно однозначну відповідність з початковою множиною.

Кодування - встановлення відповідності між елементом початкових даних і кінцевою сукупністю символів, що називається кодовою комбінацією.

Числове кодування в широкому сенсі є процедурою відображення об'єкта числами і результат може отримуватись без вимірювань. Під час вимірювання визначається кількісне значення фізичної величини і одиниця.

Дискретизація неперервного в часі сигналу $X(t)$ є лінійною операцією множення цього сигналу на функцію дискретизації в часі $\Delta(t)$

$$X_{\delta}(t) = X(t) \cdot \Delta(t). \quad (2.2)$$

Функція дискретизації є послідовністю одиничних імпульсів із періодом повторення T_{δ} , тривалістю, що дорівнює нулю і одиничною площиною, тобто є функцією Дірака

$$\Delta(t) = \delta(t - kT_{\delta}) \Big|_{k=1}^{k=n}. \quad (2.3)$$

Кроком дискретизації T_{δ} називають проміжок часу між двома сусідніми вибірками миттєвих значень сигналу. Дискретизація може здійснюватися рівномірно (із постійним кроком $T_{\delta} = \text{const}$) чи нерівномірно (зі змінним кроком $T_{\delta} = \text{var}$). Дискретизований сигнал $X_{\delta}(t)$ є послідовністю імпульсів в моменти $k \cdot T_{\delta} = t_k$, амплітуди яких відповідно дорівнюють ординатам $X(k \cdot T_{\delta})$ сигналу $X(t)$ і може бути аналітично подана у вигляді

$$X_{\delta}(t) = X(t) \cdot \delta(t - kT_{\delta}) \Big|_{k=1}^{k=n}. \quad (2.4)$$

Квантований дискретизований сигнал визначається кодом $N_X(k \cdot T_{\delta})$ і може бути поданий у вигляді

$$X_{\text{кв.}\delta}(t) = N_X(kT_{\delta}) \cdot q \cdot \delta(t - kT_{\delta}) \Big|_{k=1}^{k=n}. \quad (2.5)$$

Природно дискретизованими сигналами є, наприклад, послідовності імпульсів напруги від чутливого елемента детектора радіоактивного випромінювання.

Штучно дискретизованими сигналами є послідовності, отримані в результаті відповідної операції. Вона може здійснюватися для:

- ✓ вимірювання миттєвих ординат сигналу, які відповідають чітко заданим моментам часу;
- ✓ вибірки певних ординат сигналу, наприклад екстремальних;
- ✓ масштабного перетворення часової координати процесу, наприклад перенесення частоти в бік меншої шляхом стропування;
- ✓ запам'ятовування миттєвих ординат швидкозмінюваних неповторюваних процесів;

- ✓ подання інформації щодо неперервного сигналу цифровим приладом;
- ✓ здійснення вимірювання декількох сигналів одним приладом.

Залежно від причин виникнення *похибок*, їх можна розподілити на інструментальні, методичні та суб'єктивні.

Інструментальна похибка виникає завдяки недовершеності засобів вимірювань. Вони в свою чергу розподіляються на основну і додаткову. *Основна похибка* засобу вимірювань – це та, яка виникає за умов, прийнятих нормальними, тобто зовнішні фактори, які впливають на результат вимірювання (температура, вологість, напруга живлення тощо), знаходяться в межах стандартизованого допуску. *Додаткова* виникає при відхиленні цих параметрів від норми.

Методична похибка викликана недовершеністю самого метода вимірювань, його принциповими недоліками, неповнотою знань про об'єкт вимірювань, неточністю використовуваних розрахункових формул. Якщо максимальне значення основної інструментальної похибки нормується відповідними документами, то значення методичної спроможний оцінити лише експериментатор і він має це зробити ще на етапі планування експерименту.

Суб'єктивна похибка зумовлена індивідуальними особливостями особи, яка зчитує результат вимірювання. Найбільш характерні вони для аналогових стрілочних приладів. У сучасних цифрових засобах вимірювання вони практично відсутні.

За характером зміни похибки при повторенні вимірів вони розподіляються на систематичні та випадкові.

Систематична похибка вимірювань – складова, яка лишається постійною або змінюється за певним законом протягом повторних вимірювань однієї і тієї самої величини. Відповідно до цього вони можуть бути постійні або змінні. Прикладом *постійної* може бути похибка за рахунок неточного вказівника приладу на нуль або самого приладу по горизонталі. *Змінні похибки* міняють своє значення протягом серії вимірювань, наприклад завдяки розряджуванню акумулятора, якщо результат залежить від напруги живлення. До них також відно-

сяться *періодичні*, зміна яких відбувається періодично (наприклад, за рахунок зміни напруги електричної мережі протягом доби).

Таким чином, при будь-яких вимірюваннях виникають похибки. Якщо вона виражена в одиницях вимірюваної величини, то вона є *абсолютною* і визначається формулою

$$\Delta = x_{вим} - x_{ист}, \quad (2.6)$$

де $x_{вим}$ – виміряне значення фізичної величини;

$x_{ист}$ – її істинне значення.

На практиці часто оперують значенням *відносної похибки*, яка являє собою відношення абсолютної до істинного значення вимірюваної фізичної величини

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{ист}} = \frac{x_{вим} - x_{ист}}{x_{ист}}. \quad (2.7)$$

Відносні похибки визначають у відносних одиницях або у відсотках (тоді результат треба домножити на 100%).

Для нормування похибок залучають *зведені похибки* у вигляді

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_n} = \frac{x_{вим} - x_{ист}}{x_n}, \quad (2.8)$$

де x_n – нормоване значення вимірюваного параметра.

У вигляді нормованого значення x_n виступає кінцеве значення робочого діапазону вимірювань для шкали додатних величин або сумі граничних значень для випадку визначення і від’ємних і додатних значень.

Для швидкозмінюваних вимірюваних величин, коли ця величина суттєво змінюється за час циклу вимірювань, необхідно враховувати *динамічну похибку*. Вона пов’язана із похідною вимірюваного процесу і швидкодією вимірюваного пристрою, тому вираз для неї формується із залученням перетворення Лапласа

$$\Delta_o(t) = F_n^{-1}(L(K(p) \cdot X(p) + K(p) \cdot \Delta_a(p))) - X(t), \quad (2.9)$$

де F_n^{-1} – символ функції зворотної до нормальної статичної характеристики засобу вимірювання;

L – оператор перетворення зображення сигналу на оригінал;

$K(p)$ – передатна функція засобу вимірювання;

$\Delta_a(p)$ – зображення сумарної адитивної похибки, приведеної до входу у статичному режимі.

Допустиме значення $\Delta_o(t)$ зазвичай приймають вищим від допустимого значення сумарної статичної похибки. Тому значенням $\Delta_a(t)$ у виразі (2.9) часто нехтують

$$\Delta_o(p) = \frac{K(p) \cdot X(p)}{K_{io}(p)} - X(p), \quad (2.10)$$

де $K_{io}(p)$ – номінальна передатна функція засобу вимірювання, тобто передатна функція для ідеальної ланки.

Потрібно зауважити, що для медичної галузі такі процеси нехарактерні, тому розрахунки цієї складової здійснюють в окремих випадках.

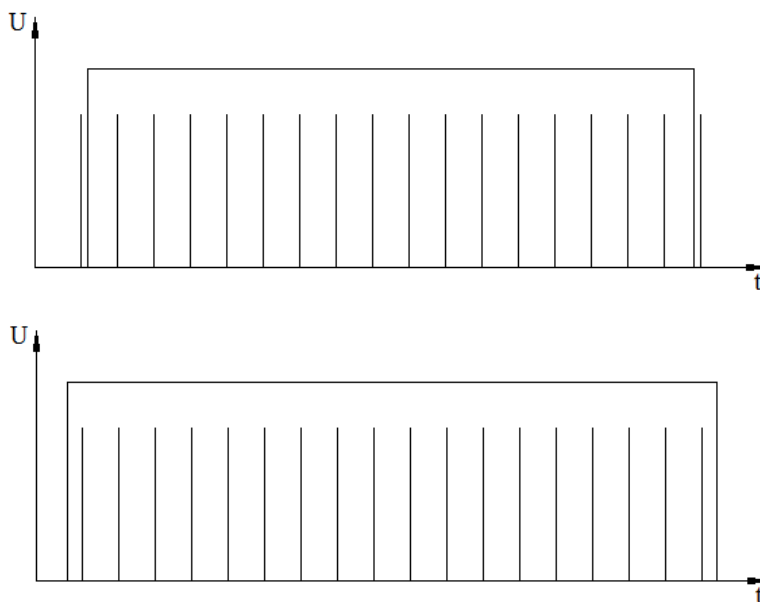


Рисунок 2.3 – Квантування за часом. Виникнення похибки

Для цифрових приладів вимірювання розглядають кож похибки квантування і дискретизації. Похибка квантування дорівнює

$$\Delta_{kv} = \pm q, \quad (2.11)$$

оскільки округлення вимірюваного значення здійснюється найближчої межі кванту. На рис. 2.3 показані причини виникнення похибки при квантуванні часових інтервалів.

Похибка дискретизації визначається кусково-лінійною апроксимацією при відновленні початкового процесу

$$\gamma_{an} = \frac{x''_{\max}}{8f_{\partial}^2}, \quad (2.12)$$

де x''_{\max} – максимальне значення другої похідної вхідного сигналу.

але, оскільки частіше завдаються похибкою γ_{an} і визначають частоту дискретизації f_{∂} , то формула набуває вигляду

$$f_{\partial} = \sqrt{\frac{x''_{\max}}{8\gamma_{an}}}. \quad (2.13)$$

Для випадку параболічної апроксимації аналогічна пара рівнянь буде становити:

$$\gamma_{an} = \frac{x'''_{\max}}{15,53f_{\partial}^3}; \quad (2.14)$$

$$f_{\partial} = \sqrt[3]{\frac{x'''_{\max}}{15,53\gamma_{an}}}, \quad (2.15)$$

де x'''_{\max} – максимальне значення третьої похідної вхідного сигналу.

Для однакових умов апроксимації синусоїдного сигналу частотою 1 Гц і похибці апроксимації $\gamma_{an} = 1\%$, частота дискретизації f_{∂} становить 22 та 11 Гц для першого і другого випадків відповідно. Є також інші більш складні методи розрахунку частоти дискретизації.

2.2 Режими реєстрації даних під час проведення експерименту

Використовувані в теперішній час системи автоматики та управління (інформаційно-вимірювальні, контролю, управління технологічними процесами тощо) здебільшого будуються за ієрархічним принципом. На нижньому рівні збирання даних і формування виконавчих сигналів найчастіше використовуються мікропроцесорні конт-

ролери. На верхніх рівнях, де потрібне досить складне математичне забезпечення для оброблювання інформації, використовуються персональні комп'ютери різної конфігурації та складності. Але на всіх рівнях використовуються мікропроцесори.

Мікропроцесор – пристрій з програмним управлінням, який здійснює оброблювання цифрової інформації та управління процесами, побудований здебільшого на одній чи декількох великих інтегральних схемах.

Мікропроцесорний комплект – сукупність мікропроцесорних та інших інтегральних схем, сумісних за конструктивно-технологічним виконанням і призначених для комплексного використання.

Центральний процесор – функціонально завершений пристрій, що складається з мікропроцесора та необхідних допоміжних блоків (системного генератора, системного контролера, арбітра шин тощо).

Мікропроцесорний контролер – пристрій, який здійснює збирання даних та управління процесами і будується на базі мікропроцесорного комплекту.




Однокристальний мікроконтролер – контролер, побудований у вигляді однієї великої чи надвеликої інтегральної схеми.

Персональний комп'ютер – універсальна електронно-обчислювальна машина, яка складається з процесорного модуля, пам'яті, дисплея, засобів зв'язку з периферійними пристроями, при необхідності пульта управління та джерела живлення, об'єднаних спільною конструкцією, і призначається для індивідуального користувача.

Пристрої автоматики і управління, які призначаються для роботи з персональними комп'ютерами можуть бути **вбудованими**, коли вони підключаються до внутрішніх шин і розташовуються безпосере-

дньо в корпусі персонального комп'ютера, та **зовнішніми**, коли вони підключаються до зовнішніх інтерфейсів, які мають з'єднувачі на корпусі персонального комп'ютера.

Обмін даними в таких системах може здійснюватися з використанням трьох режимів:

-  програмного, при якому використовується мінімум апаратури;
-  програмно-апаратного, пов'язаного із режимом переривань;
-  апаратного, який використовує прямий доступ до пам'яті.

Переривання – тимчасове призупинення виконання основної програми для виконання відповідної підпрограми, згідно з апаратним чи програмним сигналом управління.

Радіальне переривання - переривання, адреса вектора якого визначається тільки номером лінії запиту переривання.

Векторне переривання - переривання, адреса вектора якого задається пристроєм, який подав запит на переривання.

Прямий доступ до пам'яті – метод, який дозволяє з високою швидкістю здійснювати обмін інформацією між зовнішнім пристроєм і оперативним запам'ятовувальним пристроєм мікропроцесорної системи за рахунок проходження даних в обхід центрального процесора.

Перший з перерахованих режимів реалізується структурою, наведеною на рис. 2.4. В цьому режимі центральний процесор здійснює програмне опитування прапорця “Готовність даних”, який встановлюється зовнішнім пристроєм. При його встановленні дані з паралельного інтерфейсу зчитуються до пам'яті, або виводяться з пам'яті до зовнішнього пристрою.

Узагальнена схема програмного циклу для реалізації даного режиму наведена на рис. 2.5. Цей режим називається програмним, оскільки все може бути реалізовано суто програмно, практично без використання додаткових апаратних засобів.

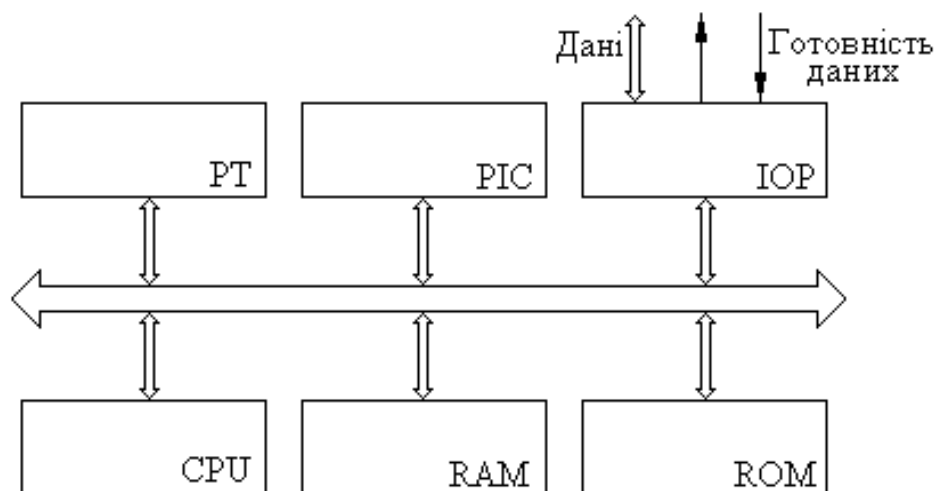


Рисунок 2.4 – Структура мікропроцесорної системи із програмним обміном даними

Програмно-апаратний режим пов'язаний з тим, що сам обмін інформацією здійснюється в програмному режимі, а сигнали управління цим процесом формуються апаратно (рис. 2.6).

При виникненні сигналу INT, що формується зовнішнім пристроєм, центральний процесор закінчує виконання основної програми, всі необхідні дані фіксує в допоміжному запам'ятовувальному пристрої (стеку), і у відповідності із підпрограмою оброблювання переривання здійснює обмін даними в програмному режимі.

Стек – структура пам'яті, в якій новий елемент завжди записується в її початок (верхівку) і черговий зчитуваний елемент також завжди вибирається з її початку. Тут використовується принцип “останнім записаний – першим зчитаний”. Аналогом стекової пам'яті є магазин зброї з набоями.

Узагальнена схема програмного забезпечення наведена на рис. 2.6. Після завершення підпрограми оброблювання переривання, центральний процесор зчитує зі стека раніше записані дані і повертається до виконання основної програми.

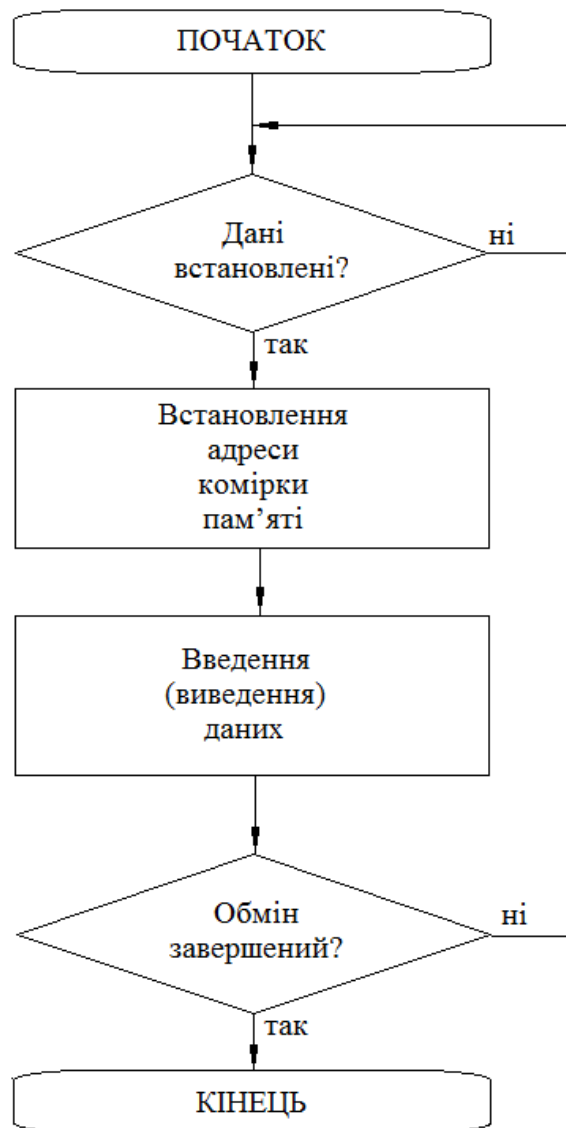


Рисунок 2.5 – Схема програмного циклу обміну даними

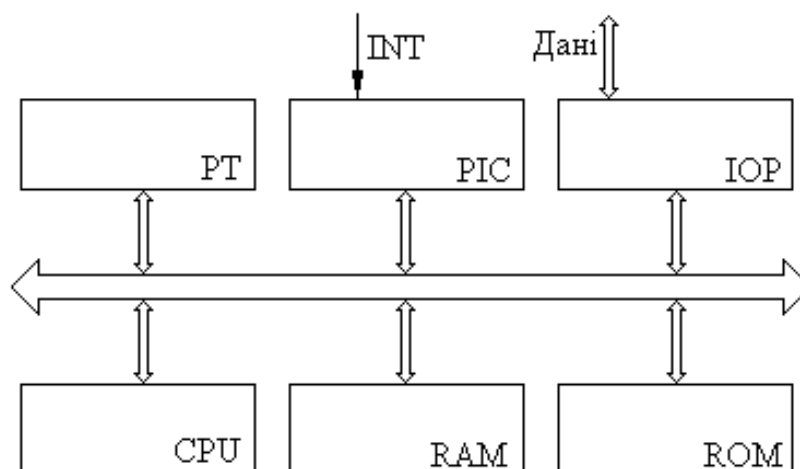
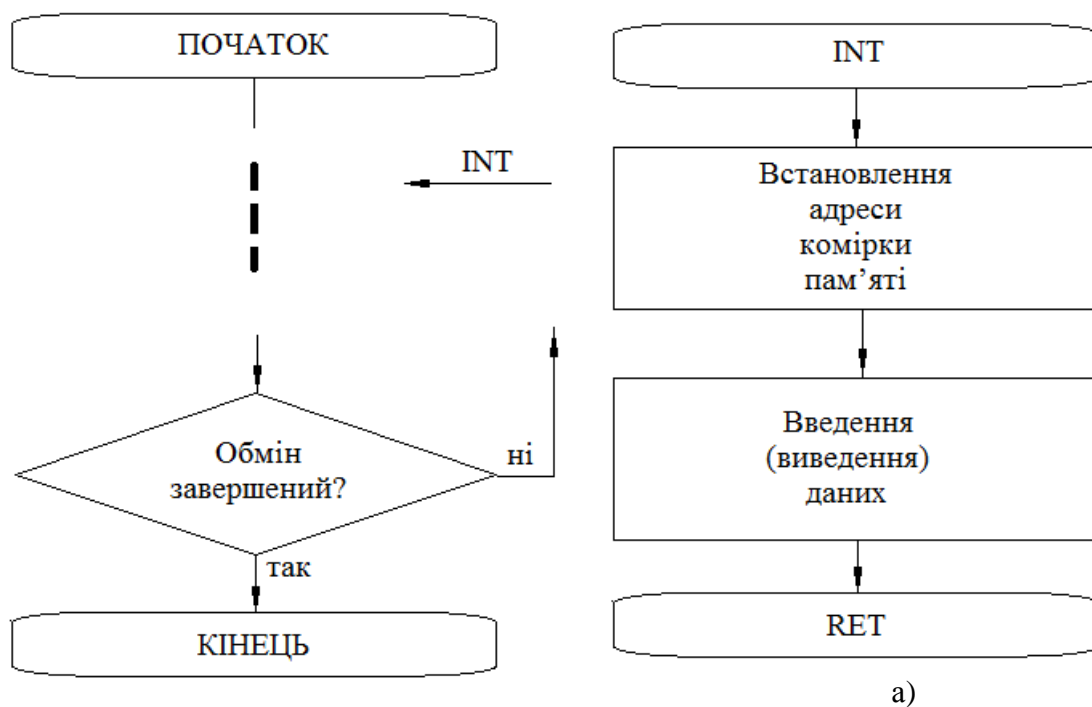


Рисунок 2.6 – Програмно-апаратна реалізація режиму обміну даними



б)

Рисунок 2.7 – Схема обміну даними в режимі переривань

Обмін даними в режимі прямого доступу до пам'яті здійснюється апаратно за допомогою відповідних контролерів, як це подано на рис. 2.8.

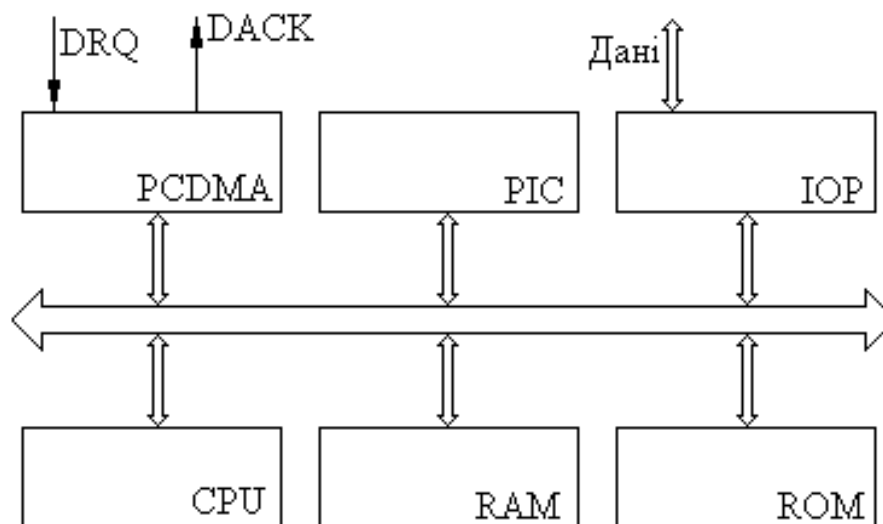


Рисунок 2.8 – Обмін даними в режимі прямого доступу до пам'яті

Мікропроцесор є універсальним пристроєм, спроможним виконувати різноманітні операції. На відміну від нього контролер прямого доступу до пам'яті спроможний лише здійснювати обмін даними, але

з максимальною швидкістю, оскільки процедури підраховування циклів записування, визначення адреси комірки пам'яті, пересилання даних тощо реалізовані в ньому апаратно.

За вимогою зовнішнього пристрою, який формує сигнал DRQ, контролер прямого доступу надає запит процесору щодо захоплення системного каналу. Після відключення від шини центрального процесора контролер підключається до пам'яті і формує сигнал підтвердження прямого доступу DACK. Після цього здійснюється або зчитування даних з пам'яті до зовнішнього пристрою чи їх записування до пам'яті. Після завершення обміну контролер від системної магістралі відключається, а процесор до неї підключається. Сигнали прямого доступу до пам'яті знімаються і мікропроцесорна система спроможна працювати у звичайному режимі. Програмно в даному випадку здійснюється лише ініціалізація контролера, під час якої задаються режим роботи, обсяг даних, початкові адреси тощо. Все інше здійснюється апаратним шляхом.

Порівняння вказаних режимів обміну даними показує, що перший з них реалізується найпростіше, не викликає складностей при налаштуванні, але швидкодія його найменша.

Апаратні переривання, як відомо, застосовуються для формування сигналу щодо готовності до обміну у випадку, коли небажано організовувати програмне опитування прапора готовності. У випадку застосування переривань процесор звільняється від опитування пристрою зв'язку з об'єктом і може займатися замість цього іншими задачами. Якщо необхідність в обміні виникає рідко, то вииграш у швидкодії системи в цілому може бути значним. Але використання переривань в жодному разі не збільшує швидкості обміну даними з пристроями, навпаки, зменшує її. Це пов'язано з тим, що реакція на переривання набагато повільніша ніж на встановлення прапора готовності. Таким чином для обслуговування переривання процесор повинен завершити поточний цикл, зберегти у стеку поточні значення своїх регістрів і лише потім перейти до програми оброблювання переривання. Тому у випадку, коли треба забезпечити максимальну швидкість реакції на зовнішню подію, набагато краще використовувати опитування

прапора готовності. Так само треба підходити і при досить частому виникненні запитів в обміні, оскільки крім витрат часу на перехід до підпрограми оброблювання переривання потрібен також час на ініціалізацію контролера переривань, який входить до складу комп'ютера.

Часто має сенс продублювати переривання прапором готовності, що дозволить при написанні протоколу обміну даними більш гнучко враховувати особливості процесу.

Переривання в персональному комп'ютері IBM PC радіальні, тобто для переходу процесора до оброблювання переривання достатньо сформувати запит, у вигляді якого виступає позитивний фронт сигналу на одній з ліній IRQ. Але імпульс повинен мати певну тривалість для того, щоб цей сигнал був оброблений контролером переривань і викликав потрібну реакцію. Доцільно формувати перепад сигналу IRQ до логічної "одиниці" при виникненні необхідності обміну (тобто апаратно), а скидання до стану логічного "нуля" за командою процесора, яку він виконує в ході програми обробки переривання (тобто програмно).

Іноді виникає необхідність передбачити в схемі можливість заборони переривання, що можна зробити апаратно чи маскуванням даного переривання в контролері (програмним шляхом).

Використання режиму переривань дозволяє вивільнити центральний процесор для виконання інших процедур (оброблювання даних, допоміжних математичних розрахунків, адаптації пристрою до параметрів об'єкта за певним алгоритмом тощо), але налаштування апаратної та програмної частин викликає певні складнощі. Програмні налаштувачі в більшості своїй не реагують на апаратні переривання, тобто програмні модулі доводиться налагоджувати окремо. Крім цього використання великої кількості програмних переривань пов'язано із суттєвим ускладненням протоколу обміну.

З першого погляду прямий доступ до пам'яті забезпечує максимальну швидкість видачі або отримання інформації. Але для режиму поодинокого передавання не з'являється ніякого виграшу в швидкості.

Найвищу швидкість видачі або отримання даних забезпечує не сам прямий доступ, а пристрої з так званою розподіленою пам'яттю, в

яких швидка буферна пам'ять доступна як з боку зовнішнього пристрою, так і з боку системного каналу. При цьому процесор розглядає цю буферну пам'ять як частину системної оперативної пам'яті. В цьому випадку отримання інформації в ОЗП комп'ютера або видача її звідти може здійснюватися з високою швидкістю, що визначається виключно швидкодією буферного ОЗП. Виходячи з цього у буферний ОЗП потрібно будувати саме на базі статичної пам'яті. Адже тут основним фактором є не вартість мікросхем пам'яті, а їх швидкодія (і відсутність необхідності регенерації).

Вказана висока швидкість досягається лише в межах передавання блоку інформації, розмір якого визначається розміром буферного ОЗП. При необхідності ж передавання більшого обсягу інформації середня швидкість передавання буде визначатись швидкодією комп'ютера в цілому і виявиться значно нижчою.

Особливістю процесорів IBM PC є наявність ланцюгових чи рядкових команд введення/виведення. Їх використання дозволяє забезпечити швидкодію не меншу, ніж використання прямого доступу. При цьому істотною перевагою ланцюгових команд є відсутність необхідності ініціалізації контролера прямого доступу. Використання ж їх разом з перериваннями дозволяє розпочинати обмін за запитом виконавця (як і для режиму прямого доступу до пам'яті). Тому режим прямого доступу до пам'яті має дуже обмежене використання.

Крім цього, навіть стандартні плати розширення, що випускаються деякими фірмами і використовують прямий доступ до пам'яті, коректно працюють не в усіх комп'ютерах. Виробники вказують в комп'ютерах яких фірм їх плати гарантовано працюють. Пов'язано це з недостатньою стандартизацією системних каналів взагалі і режиму ПДП для неї зокрема. Режим прямого доступу до пам'яті викликає також складності при налаштуванні. Це все суттєво обмежує його використання.

2.3 Мікропроцесорні вимірювальні канали

Амплітудний вимірювальний канал призначений для вимірювання напруги. Складність вимірювань напруги в медицині визначається специфічними особливостями формованих електричних сигналів:

- дуже широким діапазоном частот (від постійних напруг та інфрачервоних частот до ультразвукових);
- великим діапазоном вимірюваних напруг (від мілівольт до кіловольт);
- різноманітністю і складністю форм сигналів;
- малою потужністю джерела напруги, що не допускає помітного споживання потужності вимірювальним приладом.

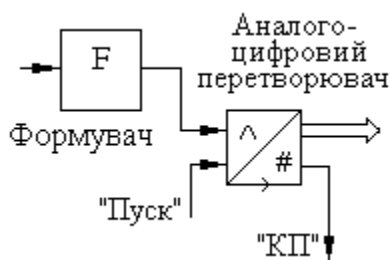


Рисунок 2.9 – АЦП

Для побудови електронних вольтметрів найчастіше використовуються аналого-цифрові перетворювачі (АЦП), як це подано на рис. 2.9. Здебільшого вони здійснюють вимірювання напруги в біполярному режимі ($-5 - +5$)В або уніполярному ($0 - 10$)В, що завдається сигналами управління і дже-

релом опорної напруги. Для узгодження вимірювального діапазону із вхідним сигналом використовується формувач, який може бути підсилювачем або подільником напруги. Якщо вхідний вимірюваний сигнал змінюється за цикл перетворення АЦП, необхідно додатково використовувати елемент аналогової пам'яті (пристрій вибірки-зберігання), який фіксує рівень напруги на час роботи АЦП. Початок перетворення задається сигналом «Пуск», а завершення фіксується за сигналом «Кінець перетворення», який формує сам АЦП. Під час перетворення кодова комбінація на виході постійно змінюється і лише зчитування даних за сигналом «КП» гарантує правильність зчитаного результату. Результатом перетворення є кодова комбінація N_x , яка значається вхідною вимірюваною напругою U_x відповідно до формули

$$N_x = \frac{U_x}{U_{on}} N_{\max}, \quad (2.16)$$

де U_{on} – значення опорної напруги АЦП;

$N_{\max} = (2^n - 1)$ – максимальне значення вихідного коду;

n – кількість розрядів АЦП.

Тоді вимірювана напруга

$$U_x = U_{on} \frac{N_x}{N_{\max}}. \quad (2.17)$$

Або з урахуванням коефіцієнта перетворення формувача $k_{ex} = U_x / U_{ex}$

$$U_{ex} = \frac{U_x}{k_{ex}} = \frac{U_{on} \cdot N_x}{k_{ex} \cdot N_{\max}}. \quad (2.18)$$

Зазвичай застосовуються пристрої, які використовують двійковий код, тому кодова комбінація це враховує. Якщо АЦП є функціонально завершеним і вже містить всі необхідні модулі (в тому числі джерело опорної напруги), то в ньому або передбачено або дозволено регулюванням підбирати її значення. Доцільно вибирати таким чином, щоб це значення за цифрами відповідало двійковому коду (10,23 В). Тоді десятирозрядний АЦП, який має значення $N_{\max} = (2^{10} - 1) = 1023$, буде мати чітку роздільну здатність $U_{on} / N_{\max} = 10,23 / 1023 = 10^{-2}$ (В).

Для амплітудного вимірювального каналу похибка квантування визначається як одиниця молодшого розряду (кроку квантування), виходячи з чого

$$\gamma_{ADC} = \frac{1}{N_{\max}} \cdot 100\% = \frac{1}{2^n - 1} \cdot 100\%. \quad (2.19)$$

Вираз (2.19) дозволяє, завдавшись похибкою, визначити необхідну кількість розрядів АЦП

$$n = \log_2 \left(\frac{100}{\gamma_{ADC}} + 1 \right). \quad (2.20)$$

З урахуванням того, що кількість розрядів АЦП має бути натуральним числом для спрощення розрахунків одиницю у формулі (2.20) можна опустити, округляючи результат зі збільшенням до цілого числа.

Швидкодія АЦП вибирається за похибкою дискретизації $T_o = 1/f_o$ відповідно до формул (2.13) чи (2.15). При цьому потрібно враховувати, що період дискретизації містить в собі не лише тривалість циклу перетворення АЦП, але й тривалість всіх операцій, пов'язаних із реєстрацією даних. В більшості випадків процеси в медицині та біології є повільними і швидкодія сучасних АЦП є цілком достатньою.

Мікропроцесорні пристрої зберігають всі переваги цифрових вимірювальних пристроїв, але дозволяють реєструвати і зберігати в пам'яті значну кількість значень U_{ex} . Крім цього, наявність процесора дозволяє легко перераховувати значення N_x на результат U_{ex} . Дуже часто отриманий результат U_{ex} теж є проміжним, вимірюваною величиною є неелектрична (наприклад вага). В цьому випадку рівняння перетворення (2.18) значно ускладнюється і апаратна побудова обчислювального пристрою стає технічно і економічно не вигідною. Використання мікропроцесорних пристроїв дозволяє достатньо просто розв'язати цю задачу.

Відповідно до розглянутих раніше положень, амплітудний вимірювальний канал може будуватися як для режиму програмного опитування, так і для режиму переривань. Структура, яка реалізує перший випадок, наведена на рис. 2.10, а принцип її роботи – на рис. 2.11.

Ініціалізація пристроїв передбачає програмування паралельного порту із завданням режиму його роботи, а у випадку необхідності передавання інформації до інших технічних засобів – і послідовного. Сигнал «Пуск» формується центральним процесором через паралельний інтерфейс. За цим сигналом АЦП розпочинає процедуру перетворення вхідного сигналу U_x на вихідний код N_x у відповідності з рівнянням (2.16) і реалізованим в ньому методом вимірювання (часового розгортального перетворення, двотактного інтегрування, порозрядного врівноваження тощо). Центральний процесор через паралельний ін-

терфейс здійснює постійне опитування сигналу «Кінець перетворення». Його поява означає, що АЦП завершив процедуру перетворення і дані можуть бути зчитані до відповідної комірки оперативної пам'яті.

Якщо необхідно реєструвати не одне, а декілька значень, то знову формується сигнал «Пуск» і процес продовжується циклічно, поки не буде зареєстрований весь масив значень. Після цього можна здійснювати оброблювання даних.

Для цього режиму все реалізується суто програмно із використанням компонентів, які вже закладені до складу комп'ютерної системи.

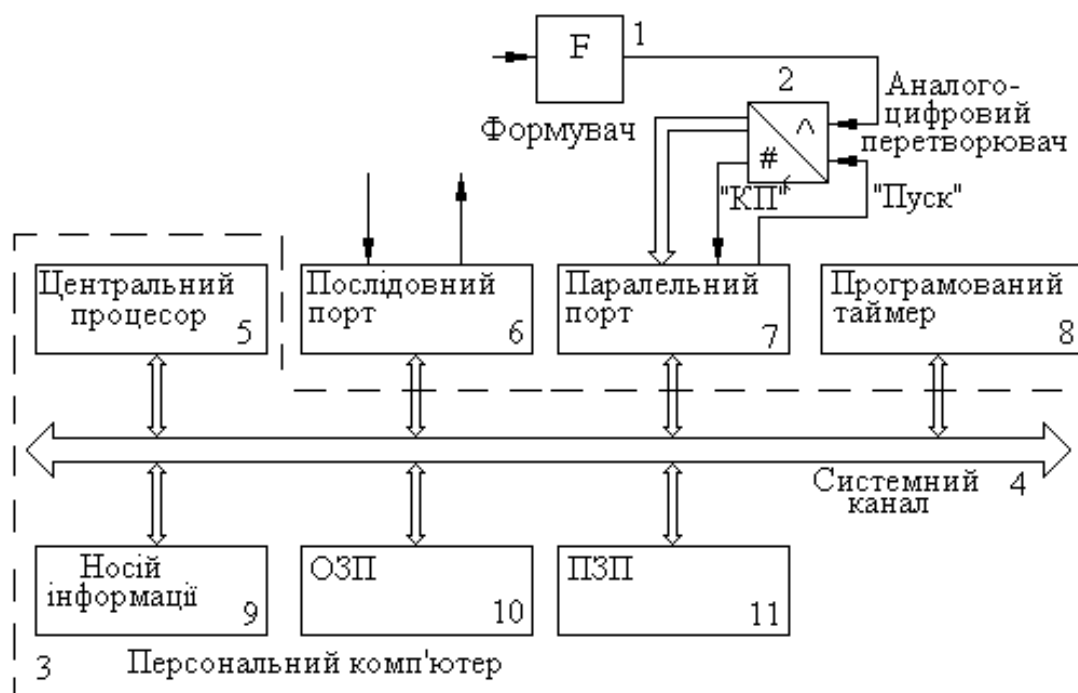


Рисунок 2.10 – Структура амплітудного вимірювального каналу на базі комп'ютерної системи для режиму програмного опитування

Структура, призначена для програмно-апаратної реалізації в режимі переривань наведена на рис. 2.12, а схема, яка ілюструє її роботу, – на рис. 2.13.

Відмінністю введення значень для цього режиму є те, що за сигналом «Кінець перетворення» формується сигнал переривання INT, який поступає на контролер. Він, згідно із ініціалізованим записом, сам автоматично виходить на адресу підпрограми оброблювання переривання, у відповідності з якою здійснюється зчитування даних.



Рисунок 2.11 – Принцип роботи амплітудного вимірювального каналу на базі комп'ютерної системи для режиму програмного опитування

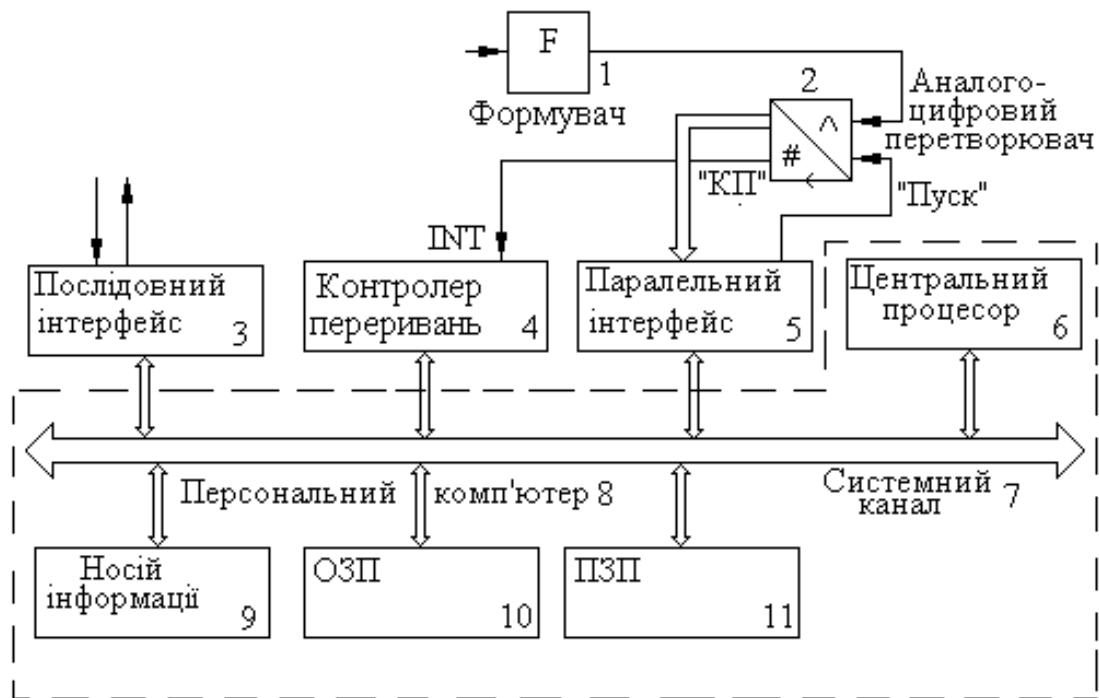


Рисунок 2.12 – Структура амплітудного вимірювального каналу на базі комп'ютерної системи для режиму переривань

Аналогічно попередньому, якщо необхідно зареєструвати масив значень, то процес продовжується циклічно, поки лічильник заповнених комірок пам'яті не покаже їх заповнення до кінця.

Частотний вимірювальний канал передбачає реєстрацію інтервалів часу методом дискретного підрахунку. При цьому може здійснюватися:

- ✓ вимірювання частоти (середнього значення), коли здійснюється підрахунок кількості інформативних імпульсів за одиницю часу;
- ✓ вимірювання періоду (миттєвого значення), при чому здійснюється підрахунок кількості імпульсів високочастотного зразкового генератора за один період інформативного сигналу.

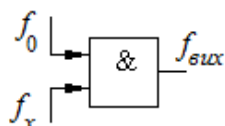


Рисунок 2.14 – Формування часових воріт

В обох випадках передбачається створення часових воріт за допомогою логічного елемента І, як це подано на рис. 2.14 і проілюстровано часовими діаграмами (рис. 2.15).

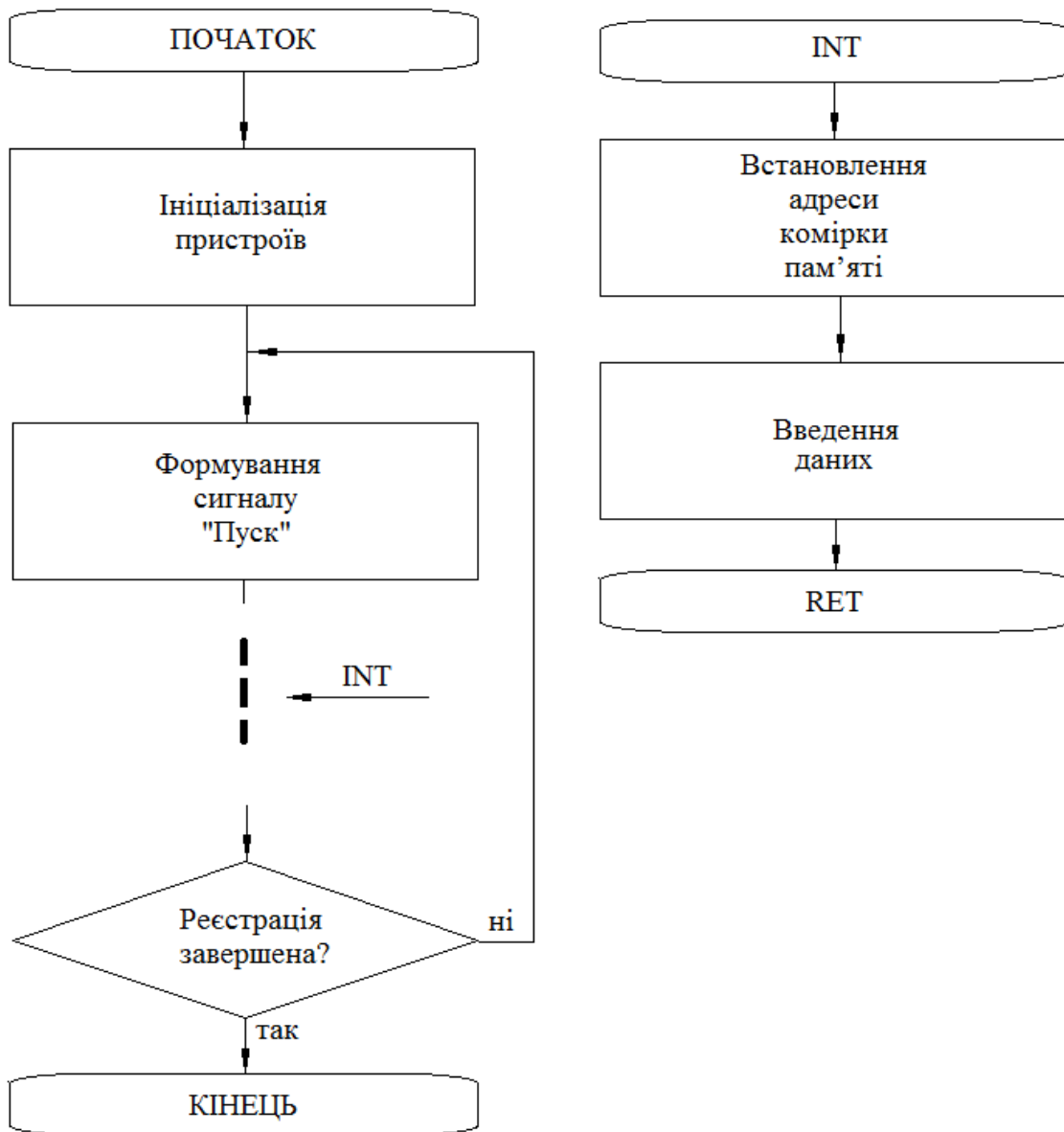


Рисунок 2.13 – Принцип роботи амплітудного вимірювального каналу на базі комп'ютерної системи для режиму переривань

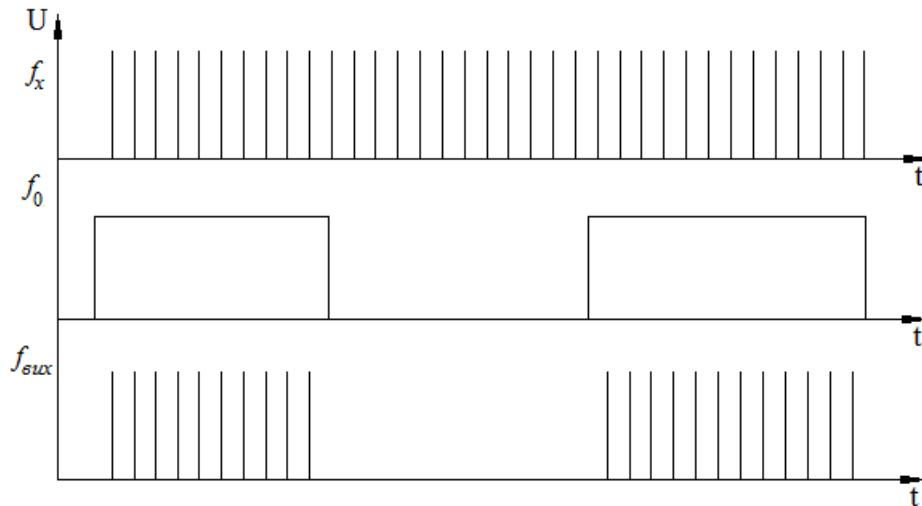
Для першого випадку кількість підрахованих імпульсів буде визначатися

$$N_{x.f} = \frac{T_0}{T_x} = \frac{f_x}{f_0} \cdot \quad (2.21)$$

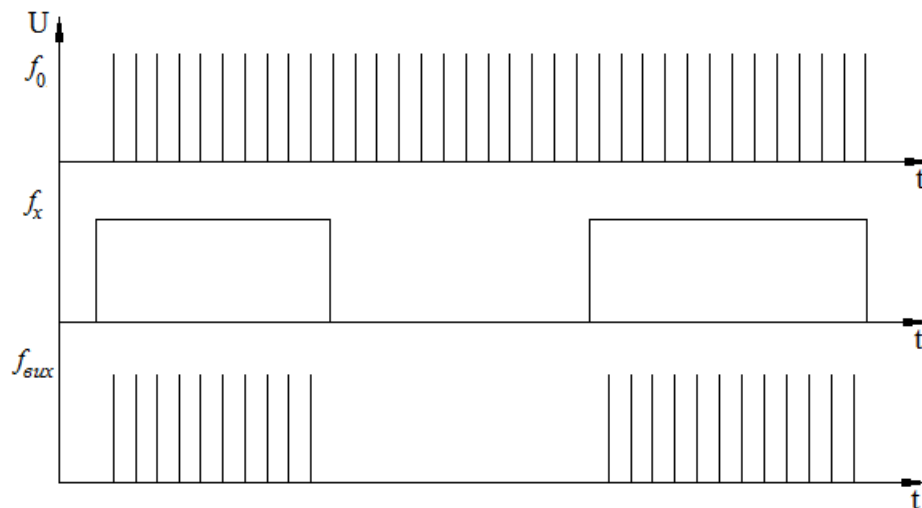
Звідси

$$f_x = N_{x.f} \cdot f_0 = \frac{N_{x.f}}{T_0} \cdot \quad (2.22)$$

Значення похибки квантування, як це ілюструється рис. 2.3, складає до 2 імпульсів вимірюваної частоти f_x , а її максимальне значення відповідає мінімуму її діапазону $f_{x.min}$, як це подано виразом (2.23).



а)



б)

Рисунок 2.15 – Утворення часових воріт для методів:

а – вимірювання частоти (середніх значень);

б – вимірювання періоду (миттєвих значень).

$$\delta_f = 2 \frac{f_0}{f_{x.min}} \cdot 100\% . \quad (2.23)$$

На підставі виразу (2.23), виходячи з нижньої межі діапазону вимірюваної частоти $f_{x.min}$ і заданої похибки квантування δ_f , можна визначити необхідну частоту зразкового генератора

$$f_0 = \frac{\delta_f \cdot f_{x.\min}}{2 \cdot 100} . \quad (2.24)$$

Кількість розрядів лічильника визначається максимальним значенням вимірюваної частоти $f_{x.\max}$, оскільки

$$N_{f.\max} = \frac{f_{x.\max}}{f_0} . \quad (2.25)$$

Тоді

$$n_f = \log_2 N_{f.\max} = \log_2 \frac{f_{x.\max}}{f_0} . \quad (2.26)$$

Як і для випадку амплітудного вимірювального каналу отримане значення n_f округляється цілого числа зі збільшенням.

Реалізувати такий варіант вимірювань можна як для режиму програмного опитування, так і для режиму переривань. Структура для першого варіанта реалізації наведена на рис. 2.16, а її робота ілюструється рис. 2.17.

Особливість роботи лічильників програмованого таймера полягає в тому, що вони підраховують імпульси, що надходять на тактовий вхід С, тільки коли на вході дозволу Р зберігається рівень логічної одиниці. Таким чином без додаткових апаратних витрат реалізується виділення часових воріт, що ілюструється рис. 2.18.

Вимірювання здійснюються у суміжних інтервалах імпульсів таким чином, що в одному часовому інтервалі рахує лічильник СТ1, а з лічильника СТ2 зчитуються дані і він обнуляється, а в суміжному навпаки.

Перевірка умови «Р СТ1 = 1?» і за цим «Р СТ1 = 0?» необхідна для синхронізації зчитування даних зі зміною вхідного сигналу. Формувач потрібен для того, щоб будувати імпульси періоду сигналу f_x , оскільки для такого сигналу не завжди тривалість імпульсу дорівнює тривалості паузи. Це дозволить користуватися наведеними розрахунковими формулами без будь-яких припущень.

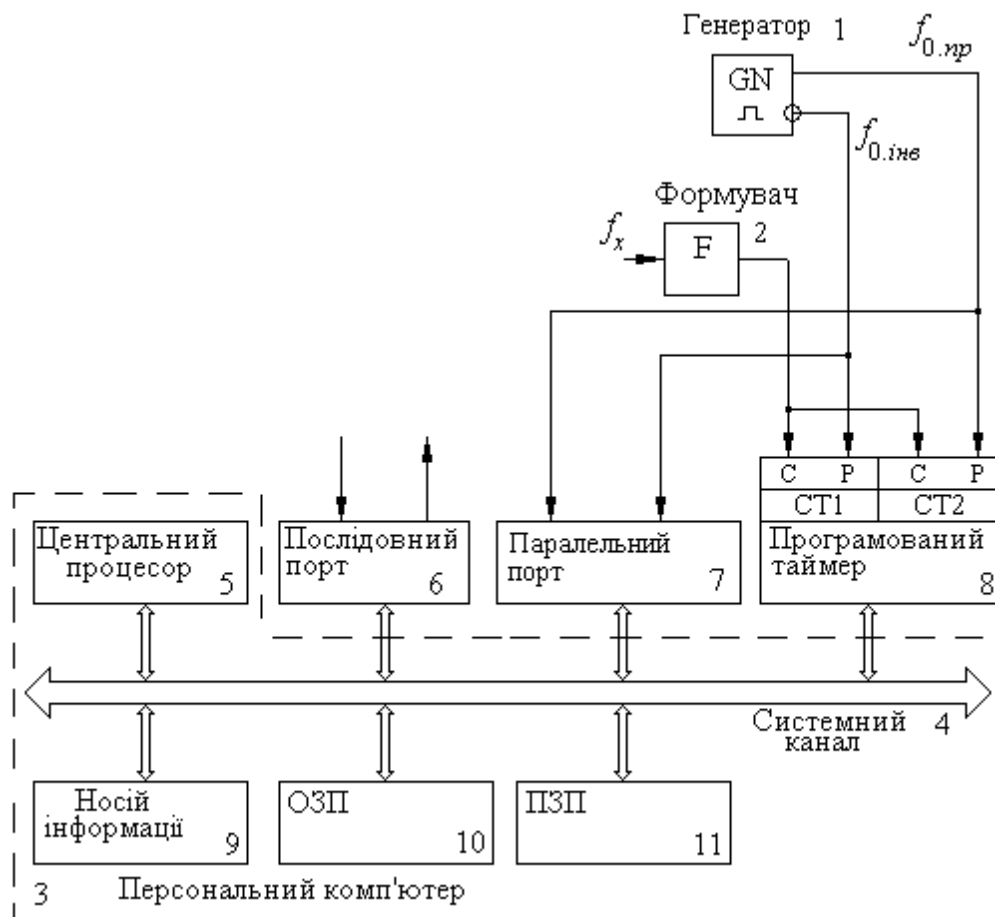


Рисунок 2.16 – Структура частотного вимірювального каналу визначення середніх значень частоти для режиму програмного опитування

Аналогічно можна побудувати структуру вимірювання середніх значень частоти для режиму переривань (рис. 2.19). Принцип її роботи ілюструється рис. 2.20.

Порівняно з попередньою, її особливістю є відсутність синхронізації зчитування даних зі зміною вхідного сигналу, оскільки контролер переривань реагує на перепад з логічного нуля на логічну одиницю на вході INT. Відповідно до цього, перепад сигналу на вході INT1 свідчить про те, що лічильник СТ1 завершив роботу, з нього можна зчитувати зареєстровані дані і обнуляти його стан, а на вході INT2 те саме для лічильника СТ2.

В обох випадках можна реєструвати як окремі поодинокі значення, так і масиви даних циклічно, як це показано на рис. 2.17 та 2.20.

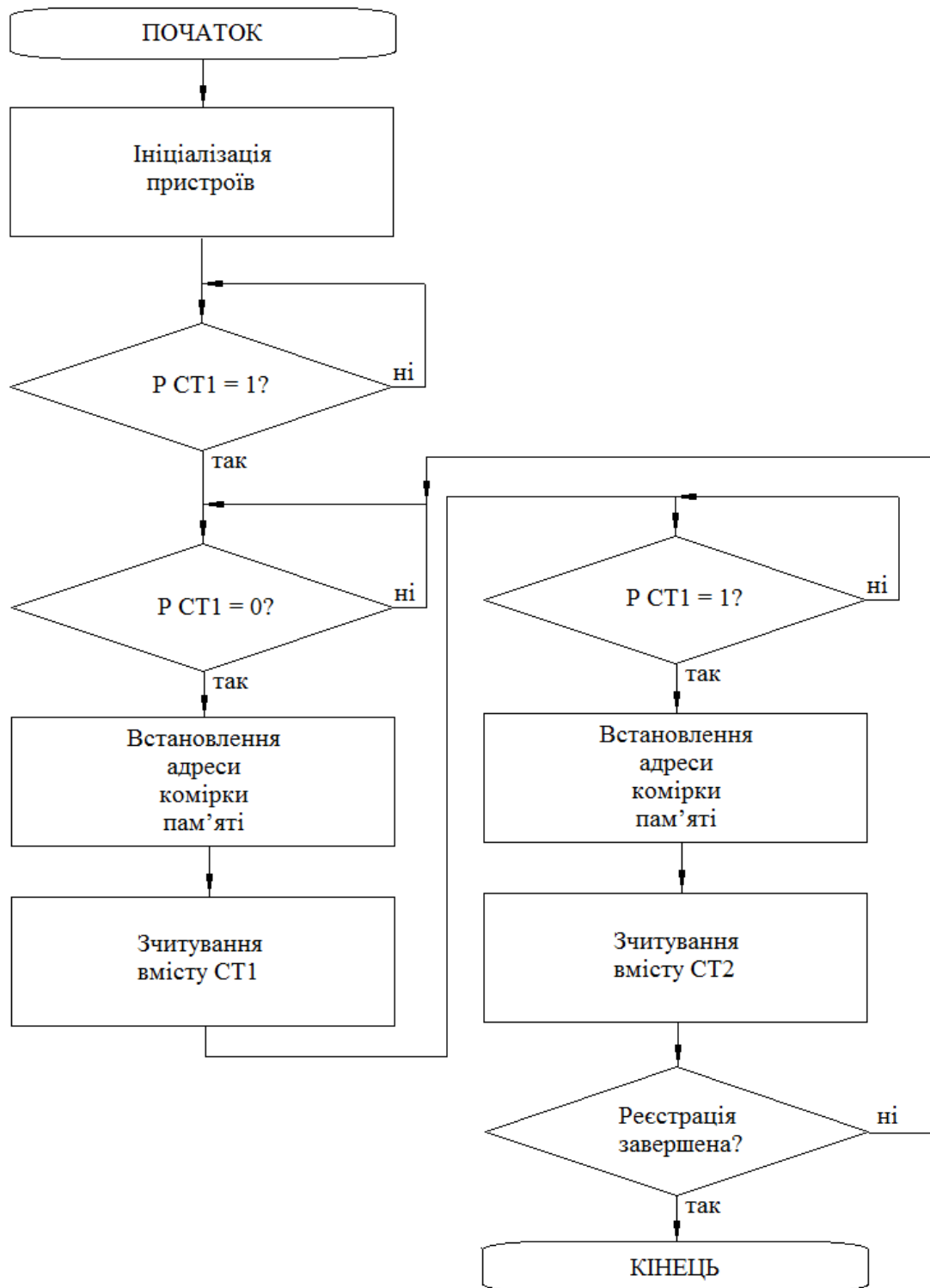


Рисунок 2.17 – Принцип роботи частотного вимірювального каналу визначення середніх значень частоти для режиму програмного опитування

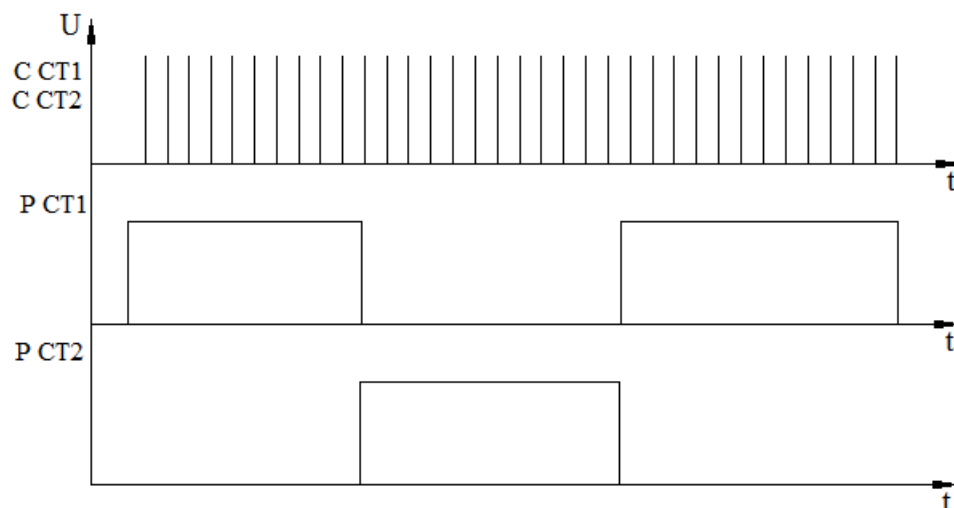


Рисунок 2.18 – Часові діаграми роботи лічильників програмованого таймера

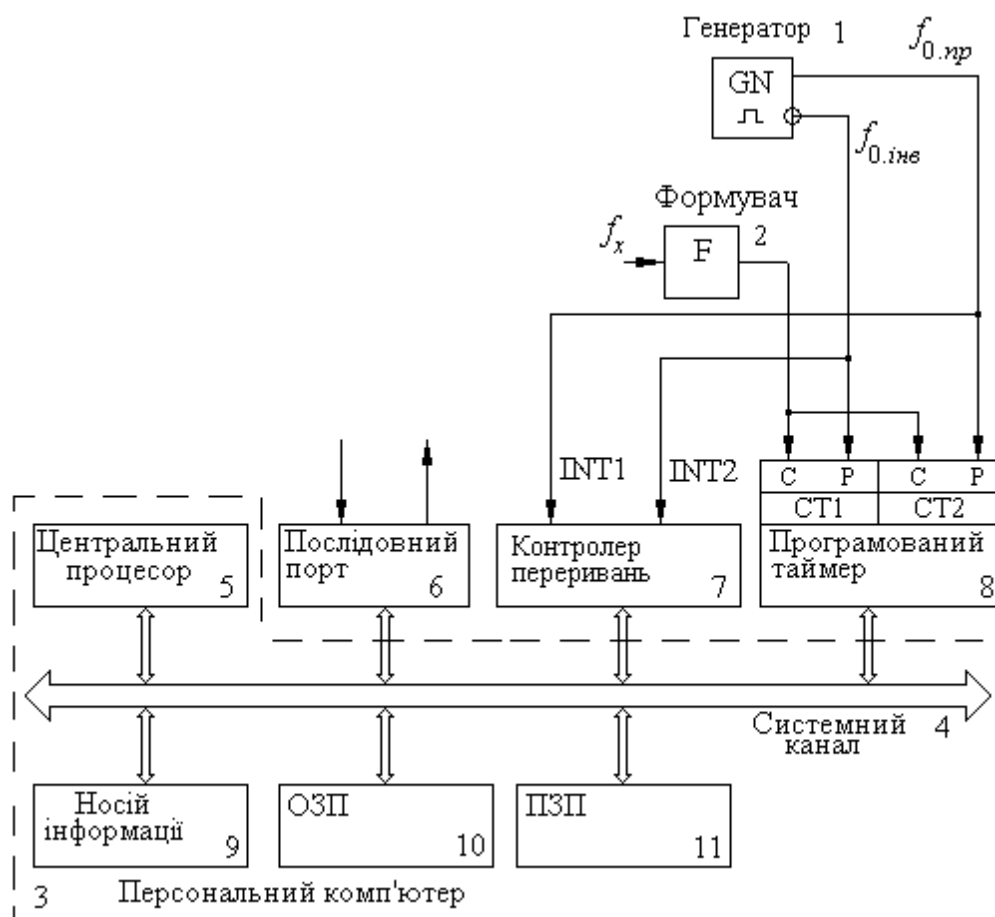


Рисунок 2.19 – Структура частотного вимірювального каналу визначення середніх значень частоти для режиму переривань

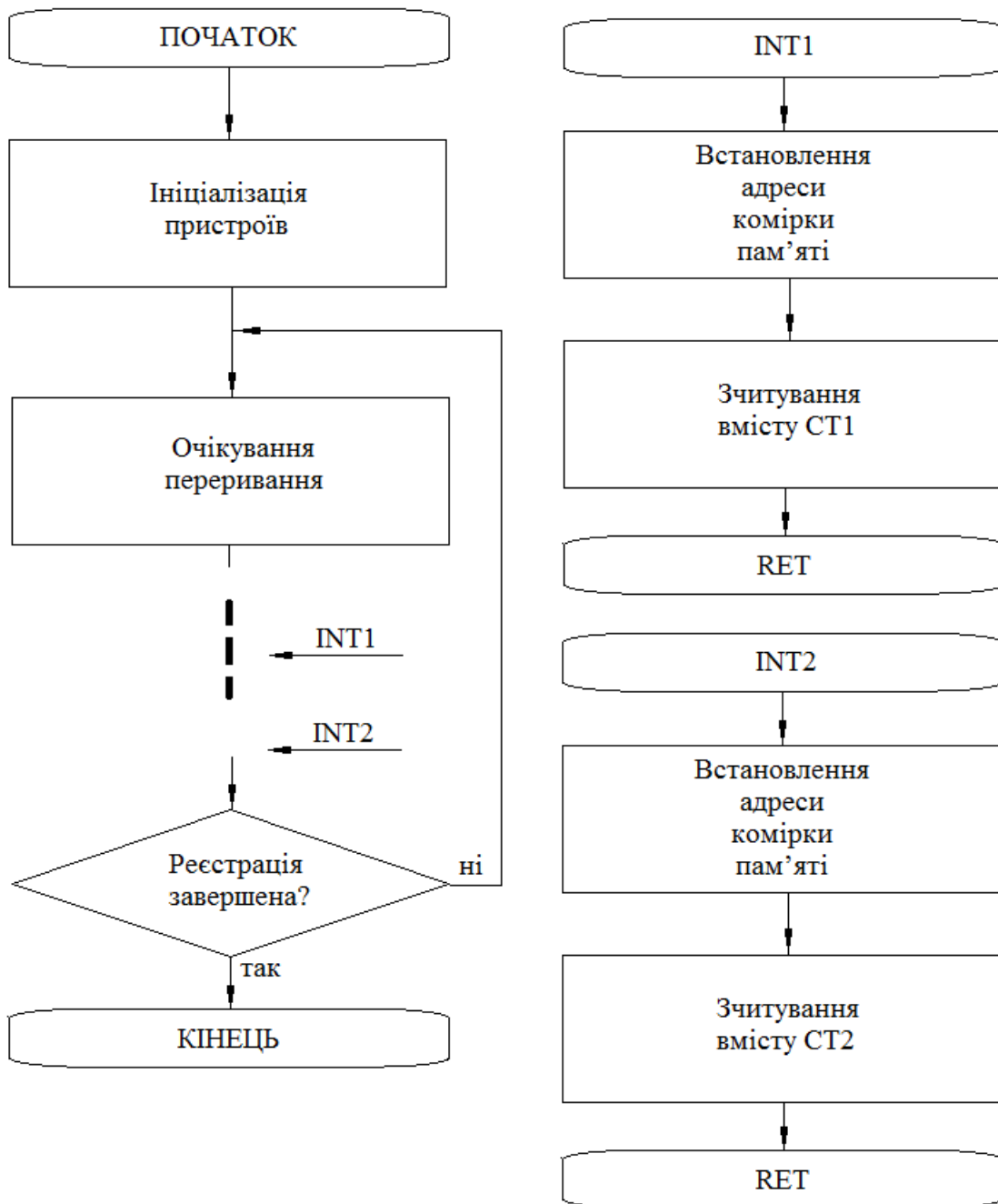


Рисунок 2.20 – Принцип роботи частотного вимірювального каналу визначення середніх значень частоти для режиму переривань

Для другого випадку кількість підрахованих імпульсів буде визначатися

$$N_{x.T} = \frac{T_x}{T_0} = \frac{f_0}{f_x} \cdot \quad (2.27)$$

Звідки

$$f_x = \frac{f_0}{N_{x.T}} = \frac{1}{N_{x.T} \cdot T_0} . \quad (2.28)$$

Значення похибки квантування так само складає до 2 імпульсів але в даному випадку зразкової частоти f_0 , а її максимальне значення непрямо залежить від мінімуму її діапазону $f_{x.min}$, як це подано виразом

$$\delta_T = 2 \frac{f_{x.max}}{f_0} \cdot 100\% . \quad (2.29)$$

На підставі виразу (2.29), виходячи з верхньої межі діапазону вимірюваної частоти $f_{x.max}$ і заданої похибки квантування δ_T , можна визначити необхідну частоту зразкового генератора

$$f_0 = \frac{200 f_{x.max}}{\delta_T} . \quad (2.30)$$

Кількість розрядів лічильника визначається мінімальним значенням вимірюваної частоти $f_{x.min}$, оскільки

$$N_{T.max} = \frac{f_0}{f_{x.min}} . \quad (2.31)$$

Тоді

$$n_T = \log_2 N_{T.max} = \log_2 \frac{f_0}{f_{x.min}} . \quad (2.32)$$

Як і для попередніх випадків отримане значення n_T округляється цілого числа зі збільшенням.

Аналогічно такий варіант вимірювань можна реалізувати як для режиму програмного опитування, так і для режиму переривань. Структура для першого варіанта реалізації наведена на рис. 2.21, а її робота ілюструється рис. 2.17, оскільки в алгоритмічному сенсі робота схем подібна. Різниця полягає лише у розрахункових формулах, які використовуються лише на етапі проектування пристрою та розрахунку кінцевих результатів.

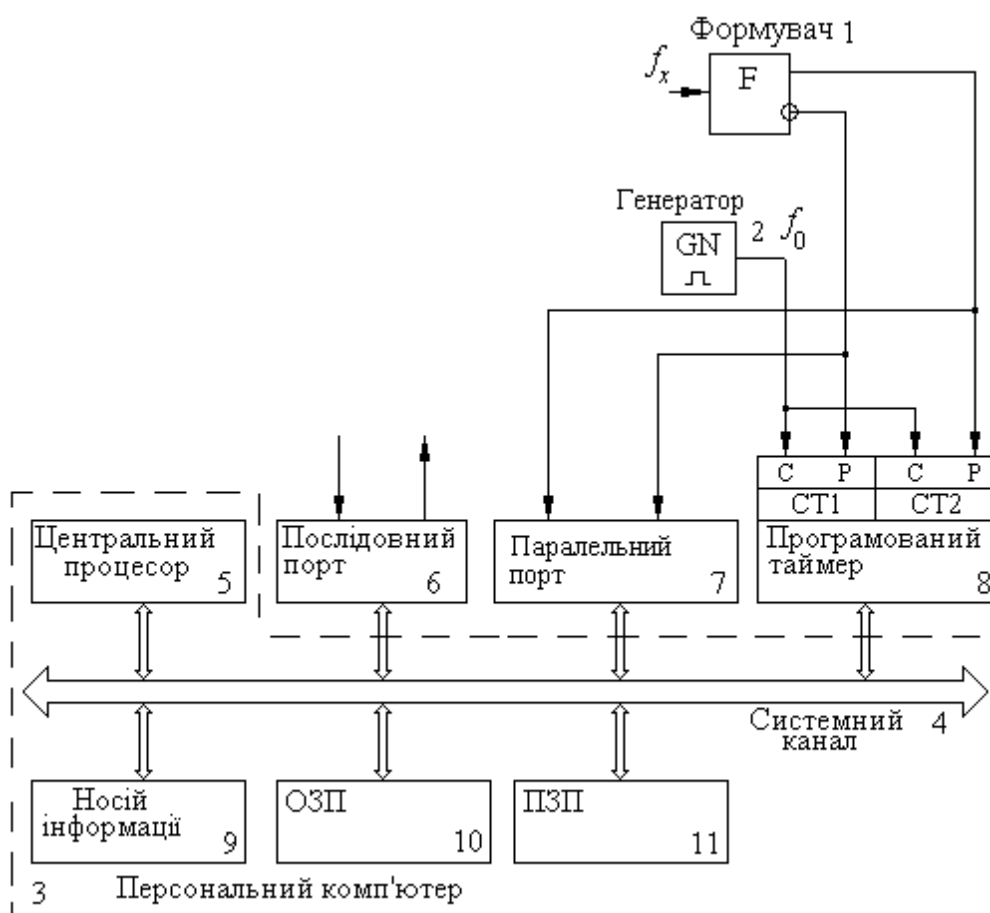


Рисунок 2.21 – Структура частотного вимірювального каналу визначення миттєвих значень частоти для режиму програмного опитування

Аналогічно можна побудувати структуру і для режиму переривань (рис. 2.22), причому, зауваження зроблені щодо її роботи для режиму програмного опитування будуть слушні і в цьому випадку. Таким чином робота пристрою буде ілюструватися відповідно рис. 2.20.

Робота **фазового вимірювального каналу** також базується на квантуванні часового інтервалу і підрахунку кількості імпульсів зразкової частоти, оскільки процес пов'язаний з вимірюванням часового інтервалу. В більшості випадків різниця фаз вимірюється для синусоподібних сигналів або для тих, які мають складну форму. Залежно від типу каналу зв'язку (радіоканал чи дротовий) в техніці використовуються радіо- чи відео імпульси. Перші з них являють собою синусоїдний сигнал змінної амплітуди, згинаючої якої є відео імпульс відповідної форми (табл. 2.1).

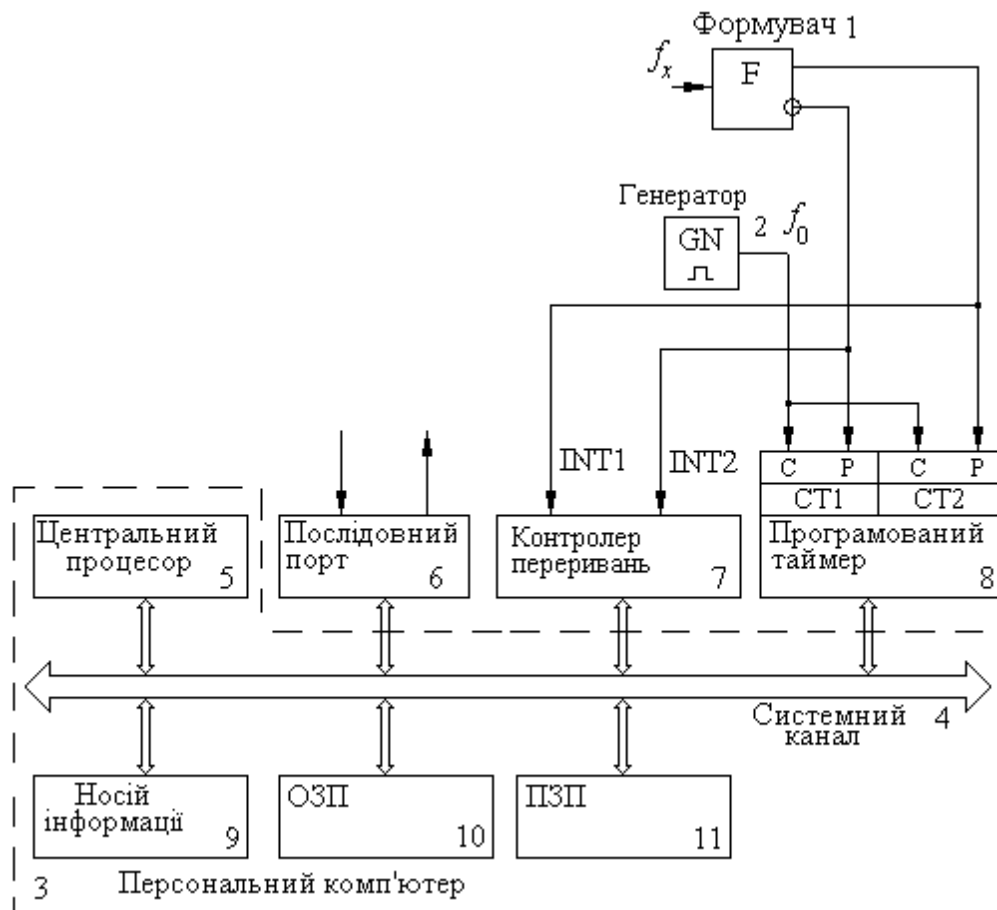

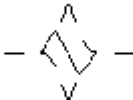




Рисунок 2.22 – Структура частотного вимірювального каналу визначення миттєвих значень частоти для режиму переривань

Таблиця 2.1 - Найбільш поширені форми імпульсів

Вид	Відеоімпульс	Радіоімпульс
Прямокутний		
Трикутний		
Косинусоїдний		
Експоненціальний		

Дзвоноподібний		
Трапецієдальний		

В більшості випадків сигнали різної форми можна звести до прямокутних імпульсів, що суттєво спрощує побудову цифрових пристроїв. Процес вимірювання різниці фаз або фазового зсуву для цього випадку ілюструється рис. 2.23.

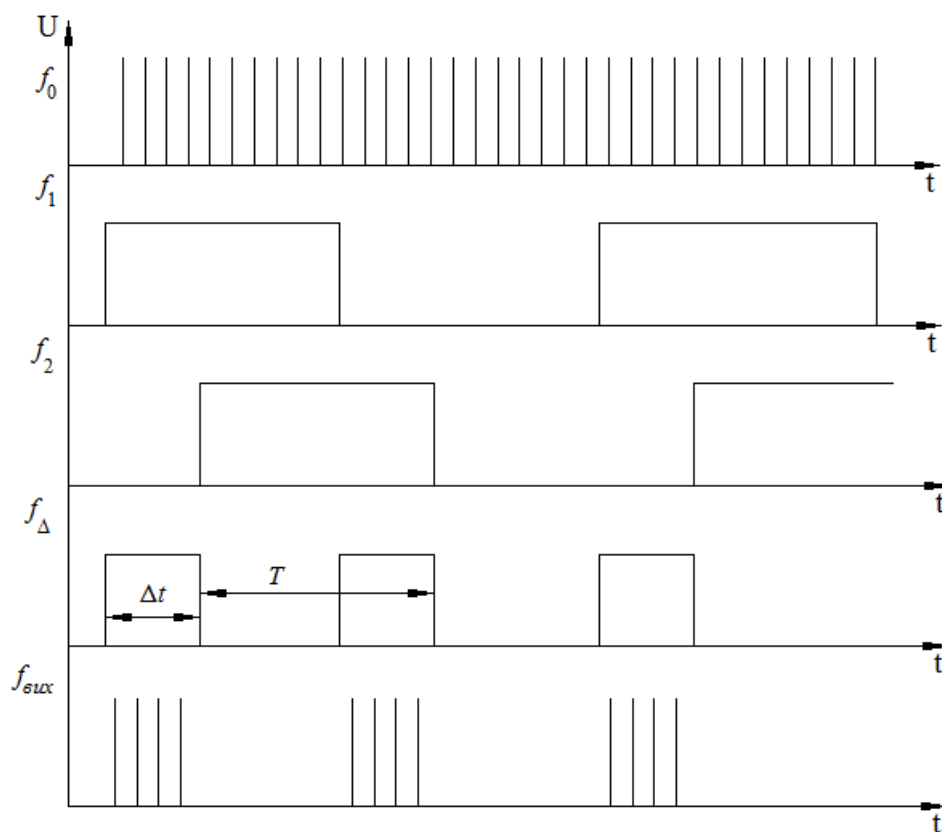


Рисунок 2.23 – Часові діаграми процесу вимірювання фазового зсуву

Інтервал часу Δt між найближчими імпульсами сигналів f_1 та f_2 визначає зсув фаз між ними. Враховуючи, що $\varphi = \omega \cdot \Delta t$, а $\omega = 2\pi/T$, можна встановити зв'язок між фазовим зсувом у градусах та відносним інтервалом Δt

$$\varphi = 360 \frac{\Delta t}{T}, \quad (2.33)$$

де T – період сигналів f_1 та f_2 .

Таким чином, необхідно сформувати імпульси, які відповідають часовим інтервалам Δt і T , виміряти їх тривалість та обрахувати зсув

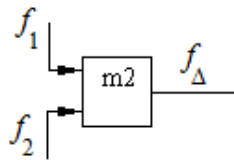


Рисунок 2.24 – Схема формування імпульсу зсуву фаз

фаз згідно (2.33). Першу з цих задач можна вирішити за допомогою суматора за модулем 2, який формує на виході логічну одиницю при неспівпадінні сигналів на входах (рис. 2.24). Дві інших теж складності не становлять.

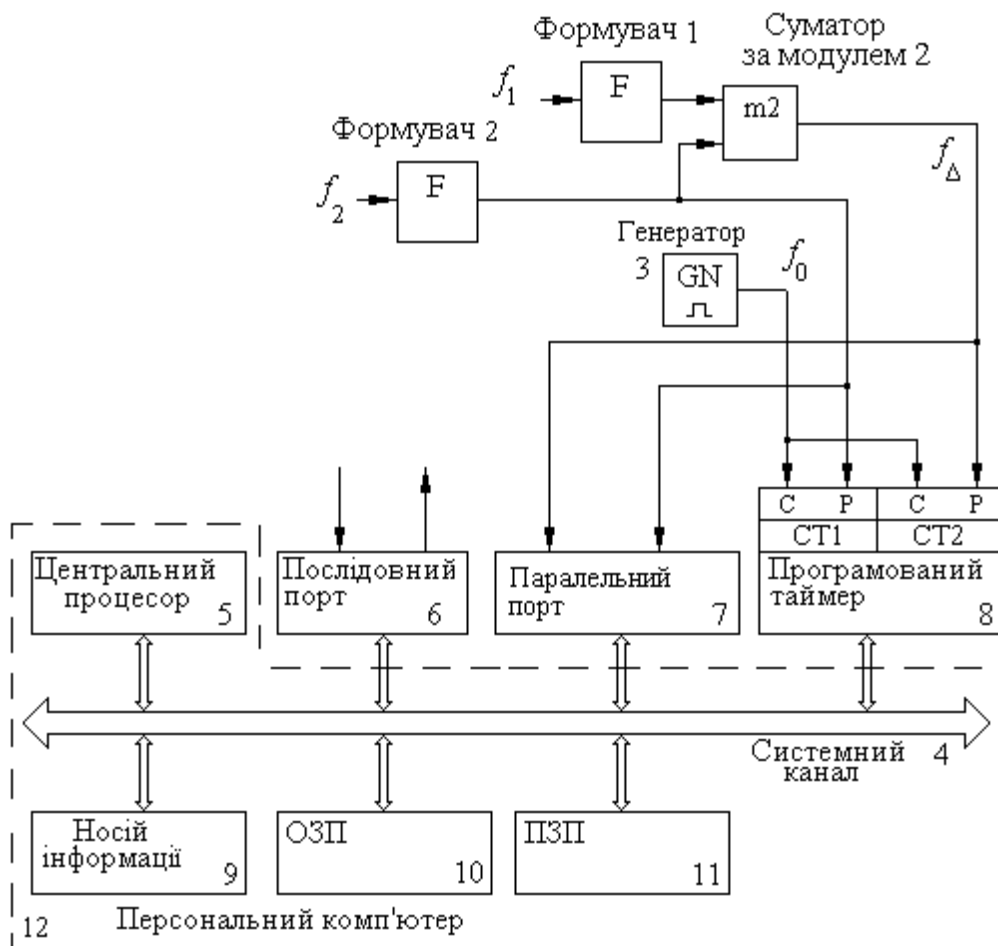


Рисунок 2.25 – Структура фазового вимірювального каналу для режиму програмного опитування

Відповідно до цього можна побудувати мікропроцесорні структури фазового вимірювального каналу для режиму програмного опитування і режиму переривань. Перша з них подана на рис. 2.25. Її робота ілюструється рис. 2.26.

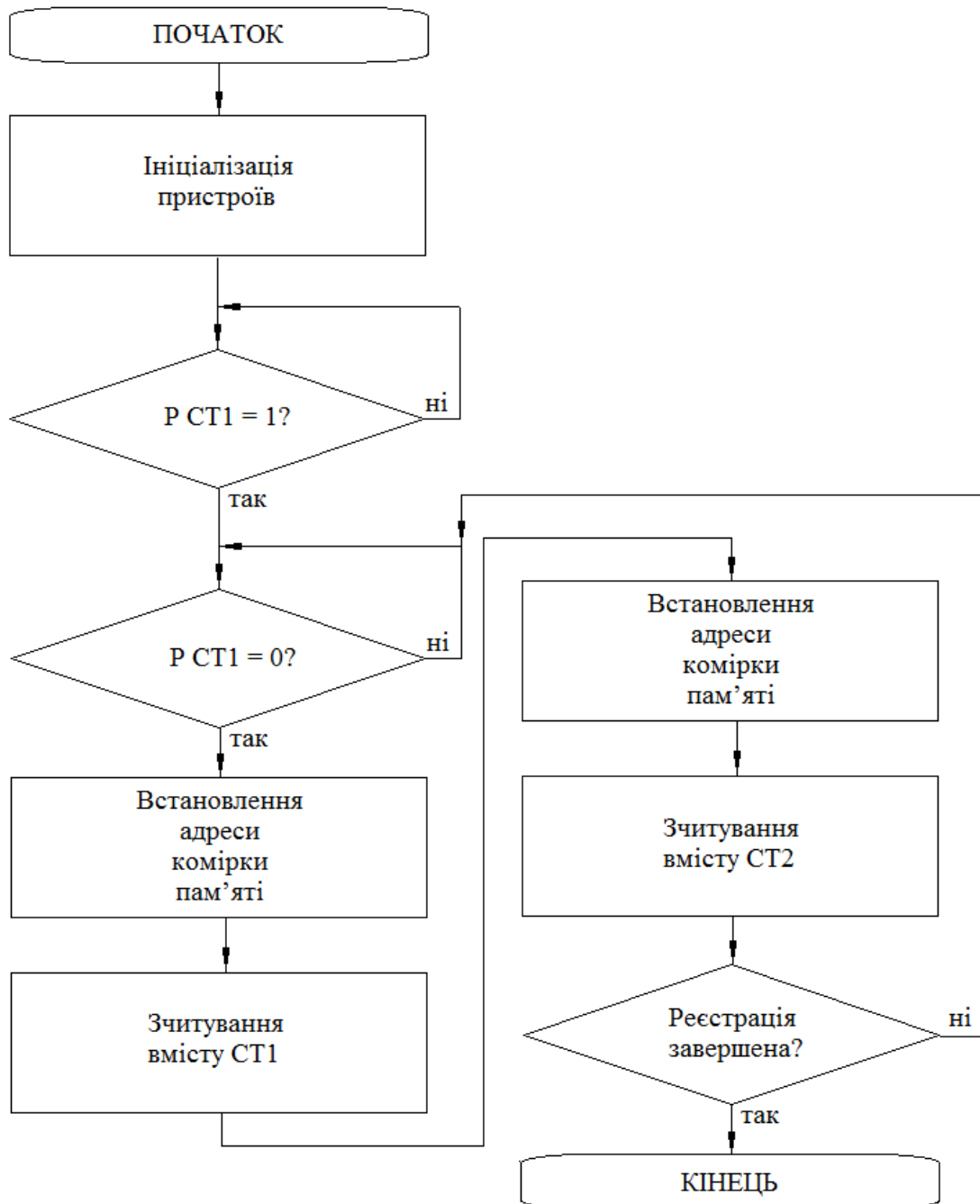


Рисунок 2.26 – Принцип роботи фазового вимірювального каналу для режиму програмного опитування

Лічильник СТ1 програмованого таймера призначений для вимірювання періоду сигналу T , а СТ2 – часового інтервалу Δt , який ви-

значає зсув фаз. Принципи роботи лічильників програмованого таймера розглянуті раніше для частотного вимірювального каналу. В результаті квантування часових інтервалів лічильники СТ1 та СТ2 відповідно зафіксують значення

$$N_T = \frac{T}{T_0} \quad (2.34)$$

та

$$N_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{T_0}, \quad (2.35)$$

де T_0 – період зразкового сигналу.

Виходячи з цього

$$T = N_T \cdot T_0 \quad (2.36)$$

і

$$\Delta t = N_{\Delta t} \cdot T_0. \quad (2.37)$$

Похибка вимірювання буде визначатися квантуванням найменшого часового інтервалу, а це мінімальне значення тривалості імпульсу зсуву фаз

$$\delta_{\Delta t} = 2 \frac{T_0}{\Delta t_{\min}} \cdot 100\%, \quad (2.38)$$

звідки можна визначити необхідну частоту зразкового генератора

$$f_0 = \frac{200}{\delta_T \cdot \Delta t_{\min}}. \quad (2.39)$$

Кількість розрядів лічильника визначається максимальним значенням періоду сигналу T_{\max} , оскільки

$$N_{T.\max} = \frac{T_{\max}}{T_0}. \quad (2.40)$$

Тоді

$$n_T = \log_2 N_{T.\max} = \log_2 \frac{T_{\max}}{T_0}. \quad (2.41)$$

Як і для попередніх випадків отримане значення n_T округляється цілого числа зі збільшенням.

Кінцеве значення зсуву фаз φ визначається за формулою (2.33) або прямо із зареєстрованих значень

$$\varphi = 360 \frac{N_{\Delta}}{N_T}. \quad (2.42)$$

Аналогічно можна побудувати структуру і для режиму переривань (рис. 2.27), причому, зауваження зроблені щодо її роботи для режиму програмного опитування будуть слушні і в цьому випадку. Робота пристрою ілюструється рис. 2.28.

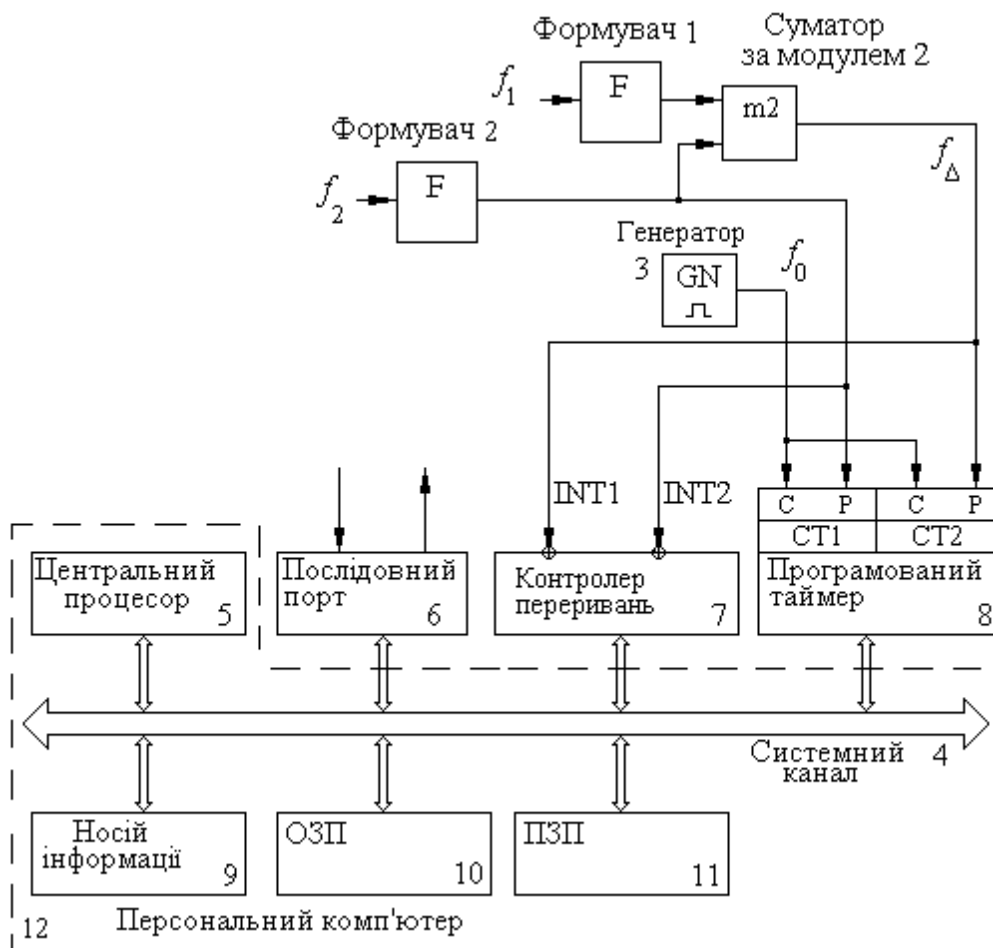


Рисунок 2.27 – Структура фазового вимірювального каналу для режиму переривань

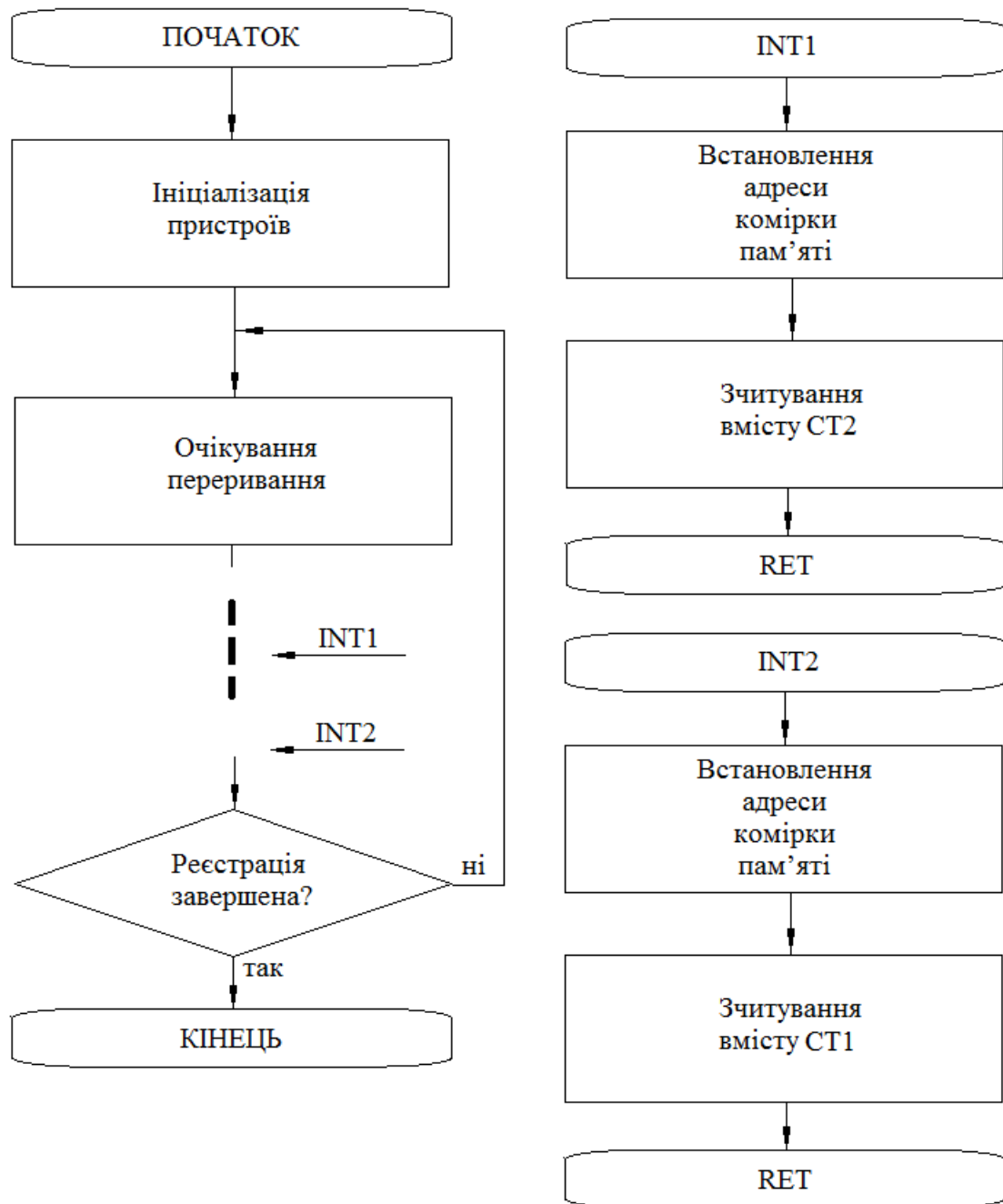


Рисунок 2.28 – Принцип роботи фазового вимірювального каналу для режиму переривань

Може виникнути ситуація, коли частота квантування і кількість розрядів лічильника разом не задовольняють технічним умовам. В цьому випадку потрібно за формулами (2.39) та (2.41) окремо підбирати параметри для обох каналів вимірювання Δt і T . В цьому випадку користуватися формулою (2.42) не можна.

2.4 Однокристальні мікроконтролери

Будувати вимірювальні та інші комп'ютерні системи різного функціонального призначення можна двома шляхами:

- 🖥 на базі персонального комп'ютера, додаючи необхідні компоненти для досягнення поставленої мети;
- 🖥 використовуючи однокристальні мікроконтролери.

Зрозуміло, що будувати складні інформаційно-консультативні системи або системи підтримки рішень потрібно на базі достатньо потужних персональних комп'ютерів. Але пристрої нижнього рівня ієрархічної системи доцільно робити на базі однокристальних мікроконтролерів. Більшість з них містять вся компоненти, що входять до складу поданих вище вимірювальних каналів: аналого-цифрові та цифроаналогові перетворювачі, таймери, паралельні та послідовні порти (інтерфейси), операційні підсилювачі тощо.

Різноманітні моделі однокристальних мікроконтролерів розроблюються і випускаються багатьма фірмами, але найбільш поширеними з них на сьогоднішній день є Atmel і Texas Instruments. Наявність компонентів для них і основні параметри наведені відповідно у табл. 2.2 і 2.3.

Таблиця 2.2 – Параметри і перелік компонентів однокристальних мікроконтролерів Atmel

Тип	Напр живлення, В	Такт частота, МГц	I/O	Flash	EEPROM	SRAM	Інтерфейси	АЦП	Таймери	ISP	Корпус
<u>ATmega8L</u>	2.7-5.5	8	23	8K	512	1k	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP28 TQFP32 MLF32
<u>ATmega8</u>	4.5-5.5	16	23	8K	512	1k	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP28 TQFP32 MLF32
<u>ATtiny11L</u>	2.7-5.5	2	6	1K	-	-	-	-	1x8bit	-	PDIP8 SOIC8
<u>ATtiny11</u>	4.0-5.5	6	6	1K	-	-	-	-	1x8bit	-	PDIP8 SOIC8
<u>ATtiny12V</u>	1.8-5.5	1	6	1K	64	-	-	-	1x8bit	I	PDIP8 SOIC8
<u>ATtiny12L</u>	2.7-5.5	4	6	1K	64	-	-	-	1x8bit	I	PDIP8 SOIC8
<u>ATtiny15L</u>	2.7-5.5	1	6	1K	64	-	-	4x10bit	2x8bit	I	PDIP8 SOIC8

<u>ATmega16L</u>	2.7-5.5	8	32	16K	512	1k	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega16</u>	4.5-5.5	16	32	16K	512	1k	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATtiny26L</u>	2.7-5.5	8	16	1K	128	128	SPI UART	11x10bit	2x8bit	I	PDIP20 SOIC20 MLF32
<u>ATtiny26</u>	4.0-5.5	16	16	1K	128	128	SPI UART	11x10bit	2x8bit	I	PDIP20 SOIC20 MLF32
<u>ATtiny28V</u>	1.8-5.5	1	20	2K	-	-	-	-	1x8bit	-	PDIP20 SOIC20 MLF32
<u>ATtiny28L</u>	2.7-5.5	4	20	2K	-	-	-	-	1x8bit	-	PDIP20 SOIC20 MLF32
<u>ATmega32L</u>	2.7-5.5	8	32	32K	1K	2K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega32</u>	4.5-5.5	16	32	32K	1K	2K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega64L</u>	2.7-5.5	8	53	64K	2K	4K	2xUART SPI	8x10bit	2x8bit 2x16bit	S	TQFP64 MLF64
<u>ATmega64</u>	4.5-5.5	16	53	64K	2K	4K	2xUART SPI	8x10bit	2x8bit 2x16bit	S	TQFP64 MLF64
<u>ATmega103</u>	4.0-5.5	6	48	128K	4K	4K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 2x16bit	I	TQFP64
<u>ATmega128L</u>	2.7-5.5	8	53	128K	4K	4K	2xUART SPI	8x10bit	2x8bit 2x16bit	S	TQFP64 MLF64
<u>ATmega128</u>	4.5-5.5	16	53	128K	4K	4K	2xUART SPI	8x10bit	2x8bit 2x16bit	S	TQFP64 MLF64
<u>ATmega161L</u>	2.7-5.5	4	35	16K	512	1K	2xUART SPI	-	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44
<u>ATmega161</u>	4.0-5.5	8	35	16K	512	1K	2xUART SPI	-	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44
<u>ATmega162L</u>	2.7-5.5	8	35	16K	512	1K	2xUART SPI	-	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega162</u>	4.5-5.5	16	35	16K	512	1K	2xUART SPI	-	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega162</u>	1.8-3.6	1	35	16K	512	1K	2xUART SPI	-	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44 MLF44
<u>ATmega163L</u>	2.7-5.5	4	32	16K	512	1K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44

											MLF44
<u>ATmega163</u>	4.0-5.5	8	32	16K	512	1K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	DIP40 TQFP44
<u>ATmega169</u> <u>L</u>	2.7-3.6	4	53 4x2 5 LCD	16K	512	1K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	TQFP64
<u>ATmega169</u> <u>V</u>	1.8-3.6	1	53 4x2 5 LCD	16K	512	1K	UART SPI	8x10bit	2x8bit 1x16bit	S	TQFP64
<u>ATmega8515</u> <u>L</u>	2.7-5.5	8	35	8K	512	512	UART SPI	-	1x8bit 1x16bit	S	PDIP40 PLCC44 TQFP,ML F
<u>ATmega8515</u>	4.5-5.5	16	35	8K	512	512	UART SPI	-	1x8bit 1x16bit	S	PDIP40 PLCC44 TQFP MLF
<u>ATmega8535</u> <u>L</u>	2.7-5.5	8	32	8K	512	512	UART SPI	8x10bit	1x8bit 1x16bit	S	PDIP40 PLCC44 TQFP MLF
<u>ATmega8535</u>	4.5-5.5	16	32	8K	512	512	UART SPI	8x10bit	1x8bit 1x16bit	S	PDIP40 PLCC44 TQFP MLF

Таблиця 2.2 – Параметри і перелік компонентів однокристальних мікроконтролерів Texas Instruments

Тип	RAM	FLASH	I/O	USART	Cap _{Com}	ADC	LCD	Інтер- фейси	Корпус
<u>MSP430F1101A</u>	128	1K	14		3	slope			SOP20
<u>MSP430F1111A</u>	128	2K	14		3	slope			SOP20
<u>MSP430F1121A</u>	256	4K	14		3	slope			SOP20
<u>MSP430F1122</u>	256	4K	14		3	ADC10			SOP20
<u>MSP430F1132</u>	256	8K	14		3	ADC10			SOP20
<u>MSP430F122</u>	256	4K	22	1	3	slope			SOP28
<u>MSP430F123</u>	256	8K	22	1	3	slope			SOP28
<u>MSP430F1222</u>	256	4K	22	1	3	ADC10			SOP28
<u>MSP430F1232</u>	256	8K	22	1	3	ADC10			SOP28
<u>MSP430F133</u>	256	8K	48	1	3	ADC12			QFP64
<u>MSP430F135</u>	512	16K	48	1	3	ADC12			QFP64
<u>MSP430C1331</u>	256	8K	48	1	3	slope			QFP64
<u>MSP430C1351</u>	512	16K	48	1	3	slope			QFP64
<u>MSP430F147</u>	1K	32K	48	2	3+7	ADC12			QFP64
<u>MSP430F148</u>	2K	48K	48	2	3+7	ADC12			QFP64

<u>MSP430F149</u>	2K	60K	48	2	3+7	ADC12		MUX	QFP64
<u>MSP430F155</u>	512	16K	48	1	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA	QFP64
<u>MSP430F156</u>	1K	24K	48	1	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA	QFP64
<u>MSP430F157</u>	1K	32K	48	1	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA	QFP64
<u>MSP430F167</u>	1K	32K	48	2	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA, MUX	QFP64
<u>MSP430F168</u>	2K	48K	48	2	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA, MUX	QFP64
<u>MSP430F169</u>	2K	60K	48	2	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA, MUX	QFP64
MSP430F1610	5K	32K	48	2	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA, MUX	QFP64
MSP430F1611	10K	48K	48	2	3+7	ADC12		Dual DAC, I ² C, BOR, DMA, MUX	QFP64
<u>MSP430F412</u>	256	4K	48		3	slope	96	BOR	QFP64
<u>MSP430F413</u>	256	8K	48		3	slope	96	BOR	QFP64
<u>MSP430F435</u>	512	16K	48	1	3+3	ADC12	160	BOR	QFP100
<u>MSP430F436</u>	1K	24K	48	1	3+3	ADC12	160	BOR	QFP100
<u>MSP430F437</u>	1K	32K	48	1	3+3	ADC12	160	BOR	QFP100
<u>MSP430F447</u>	1K	32K	48	2	3+7	ADC12	160	BOR, MUX	QFP100
<u>MSP430F448</u>	2K	48K	48	2	3+7	ADC12	160	BOR, MUX	QFP100

<u>MSP430F449</u>	2K	60K	48	2	3+7	ADC12	160	BOR, MUX	QFP100
<u>MSP430FW423</u>	256	8K+256	48	2	3+7	Comp.	96	BOR, MUX	QFP64
<u>MSP430FW423</u>	512	16K+256	48	2	3+7	Comp.	96	BOR, MUX	QFP64
<u>MSP430FW423</u>	1K	32K+256	48	2	3+7	Comp.	96	BOR, MUX	QFP64

Особливістю однокристальних мікроконтролерів є те, що всі вони оснащуються комплектом програм і системами налаштування, які містять макроасемблери, налаштовувачі (стимулятори) програм, внутрішньо схемні стимулятори та налаштовувальні пристрої. Всі прилади одного сімейства мають однаковий асемблер.

Література

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники / П.П. Орнатский – К.: Вища школа, 1976 – 432 с.
2. Орнатский П.П. Автоматические измерения и приборы (аналоговые и цифровые) / П.П. Орнатский – К.: Вища школа, 1986 – 504 с.
3. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование / М.П. Цапенко – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 439 с.
4. Полишко С.П. Точность средств измерений / С.П. Полишко, А.Д. Трубенко – К.: Вища школа, 1988 – 149 с.
5. Куликовский К.Л. Методы и средства измерений / К.Л. Куликовский, В.Я. Купер. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 448 с.
6. Кветний Р.Н. Методи та засоби передавання інформації у проблемно-орієнтованих розподілених комп'ютерних системах / Р.Н. Кветний, А.Я. Кулик – Вінниця: ВНТУ, 2010 – 362 с.

3 Оброблювання результатів експерименту

3.1 Інтерполяція і апроксимація даних

Мета інтерполяції – побудова функції $F(x)$, яка в окремих точках X_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), які називають вузлами інтерполяції, приймає значення $F(X_0) = Y_0, F(X_1) = Y_1, F(X_2) = Y_2, \dots, F(X_n) = Y_n$. Це означає, що в цих точках значення знайденої функції $F(x)$ збігаються з результатом експерименту. Завжди існує лише один інтерполяційний поліном, але знайти його можна різними способами.

Кінцево-різничний метод (Ньютона-Грегорі) є найбільш поширеним. Інтерполяційний поліном в цьому випадку має вигляд

$$F_N(X) = C_0 + C_1(X - X_0) + C_2(X - X_0)(X - X_1) + \dots + C_n(X - X_0)(X - X_1) \dots (X - X_{n-1}) \quad (3.1)$$

Коефіцієнти C_i знаходять з рівнянь $F_N(X_i) = Y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, які дозволяють записати систему

$$\begin{aligned} C_0 &= Y_0; \\ C_0 + C_1(X_1 - X_0) &= Y_1; \\ C_0 + C_1(X_2 - X_0) + C_2(X_2 - X_0)(X_2 - X_1) &= Y_2; \\ &\vdots \\ C_0 + C_1(X_n - X_0) + C_2(X_n - X_0)(X_n - X_1) + \dots + \\ &+ C_n(X_n - X_0)(X_n - X_1) \dots (X_n - X_{n-1}) = Y_n; \end{aligned} \quad (3.2)$$

Якщо крок $X_{i+1} - X_i = h$, то можна отримати різничні вирази

$$\begin{aligned} C_0 &= Y_0; \\ C_1 &= \frac{Y_1 - Y_0}{h} = \frac{\Delta Y_0}{h}; \\ C_2 &= \frac{Y_2 - 2Y_1 + Y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 Y_0}{2h^2}; \\ &\vdots \\ C_j &= \frac{\Delta^j Y_0}{(j!)h^j}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $\Delta^j Y_0$ – права різниця порядку j в точці Y_0 .

Тоді поліном набуває вигляду

$$F_n(X) = Y_0 + \frac{\Delta Y_0}{1!h}(X - X_0) + \frac{\Delta^2 Y_0}{2!h^2}(X - X_0)(X - X_1) + \dots + \frac{\Delta^n Y_0}{n!h^n}(X - X_0)(X - X_1)\dots(X - X_{n-1}). \quad (3.4)$$

Таблиця 3.1 – Приклад
завдання функції

j	x_j	y_j
0	4	1
1	6	3
2	8	8
3	10	20

Нехай функція завдана у вигляді таблиці (табл. 3.1). Тоді, виходячи з наведеної формули (3.4), коефіцієнти полінома будуть складати:

$$C_0 = 1;$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1;$$

$$C_2 = \frac{(8 - 2 \cdot 3 + 1)}{2 \cdot 2^2} = \frac{3}{8};$$

$$C_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, поліном Ньютона-Грегорі набуває вигляду

$$F_3(x) = 1 + 1 \cdot (x - 4) + \frac{3}{8} \cdot (x - 4) \cdot (x - 6) + \frac{1}{12} \cdot (x - 4) \cdot (x - 6) \cdot (x - 8) = \frac{1}{24}(2x^3 - 27x^2 + 142x - 240).$$

Поліном Лагранжа описується виразом

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x), \quad (3.5)$$

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}. \quad (3.6)$$

Тут поліноми $L_j(x)$ степені n є добутками n лінійних співмножників, тобто $F_n(x)$ може мати максимальну степінь n . При цьому $L_j(x_j) = 1$, а $L_j(x_i) = 0$ при $j \neq i$.

Тоді поліном Лагранжа для прикладу табл. 3.1 буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= 1 \cdot \frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)} + 3 \cdot \frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)} + \\
&+ 8 \cdot \frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)} + 20 \cdot \frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-6)(10-8)} = \\
&= \frac{1}{24} (2x^3 - 27x^2 + 142x - 240)
\end{aligned}$$

Поліноміальна інтерполяція не забезпечують неперервність похідних функції $y(x)$ і може давати значні похибки в проміжках між вузлами. Крім цього, вона погано пристосована для екстраполяції і, зазвичай, не забезпечує асимптотичну поведінку функції $y(x)$ при зміні аргументу x за межами інтервалу інтерполяції. Часто зі збільшенням кількості вузлів похибка такої інтерполяції не лише не зменшується, а й починає зростати.

Від цих недоліків вільна **інтерполяція з використанням сплайн-функцій**. Сплайн (splain) в перекладі з англійської означає «гнучка лінійка». Цей клас функцій можна інтерпретувати як лінію, яку утворює гнучка лінійка, закріплена в ряді точок (вузлах інтерполяції). Математично сплайн – спеціальний поліном, який приймає у вузлах значення $y(x) = y_i = y(x_i)$ і забезпечує неперервність в них похідних. Зазвичай необхідно забезпечити першої і другої похідних, для чого достатньо використати сплайн-поліноми третього порядку (кубічні сплайни).

Виходячи з викладеного, умови потребують, щоб:

- сплайни стикалися в заданих точках (вузлах) $S_i(x_i) = y_i$ та $S_{i+1}(x_i) = y_i$;
- в місцях дотику сплайнів були рівні перші і другі похідні $S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i)$ та $S''_{i+1}(x_i) = S''_i(x_i)$;
- виконувались додаткові умови $S'_1(x_0) = 0$ та $S''_n(x_n) = 0$.

Кубічний сплайн обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} + \\
&+ \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} S'(x_i) - \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} S'(x_{i+1}), \quad (3.7)
\end{aligned}$$

де h – крок інтерполяції.

Перші похідні розраховуються при допомозі формул чисельного диференціювання за трьома точками:

$$\begin{aligned} S'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n-1; \\ S'(x_0) &= \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} \text{ для } i = 0; \\ S'(x_n) &= \frac{3y_n + y_{n-2} - 4y_{n-1}}{2h} \text{ для } i = n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

У розглянутого локально завданого сплайна неперервні лише нульова та перша похідна. Для глобально завданих кубічних сплайнів неперервною повинна бути також друга похідна.

Хоча сплайн-інтерполяція може реалізовуватись і за умови змінного кроку h_i , але його значна зміна $\left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}} > 4 \right)$ призводить до втрати переваг сплайнів і похибка суттєво зростає.

Розглянуті раніше види кусково-лінійної інтерполяції можна розглядати як спотворені сплайни, у яких неперервна лише нульова похідна.

Прогнозування асимптотичної поведінки $y(x)$ за межами границь $[a, b]$ здійснюється за допомогою **лінійної екстраполяції** за формулами чисельного диференціювання:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \frac{(x-a)(4y_1 - y_2 - 3y_0)}{2h} \text{ для } x \leq a; \\ y(x) &= y_n + \frac{(x-b)(3y_n + y_{n-2} - 4y_{n-1})}{2h} \text{ для } x \geq b. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В загальному випадку **апроксимація** – наближений опис однією функцією заданого вигляду іншої функції, яка задається масивом даних. Якщо крива повинна проходити через всі точки, що задані таблицею, то це можна зробити методами інтерполяції. При іншому підході дані апроксимують з використанням таблиці, але не обов'язково, щоб

функція чітко проходила через всі точки. Такий підхід називається припасуванням кривої, яку прагнуть провести так, щоб відхилення від табличних даних було мінімальним. Зазвичай користуються методом найменших квадратів різниць між табличними значеннями і формованою кривою, суть якого описується формулою

$$E = \sum_{i=0}^n (g(x_i) - y_i)^2, \quad (3.10)$$

де y_i – таблично завдана апроксимована функція;
 $g(x_i)$ – апроксимуюча функція.

Частіше за все апроксимуючу функцію $g(x)$ вибирають у вигляді лінійної комбінації складових

$$g(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \dots + C_k g_k(x). \quad (3.11)$$

Якщо у вигляді утворювальної функції $g(x)$ використовують ортогональні поліноми, для яких $\sum g_i(x_i)g_j(x_j) = 0$ при $i \neq j$, то алгоритм суттєво спрощується.

Прикладом можуть бути **функції Чебишева** $T_n(x)$ визначаються диференціальним рівнянням:

$$T_n(x) = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \sqrt{x^2 - 1} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.12)$$

На практиці користуються більш простими формулами для отримання ортогональних поліномів Чебишева:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad (3.13)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (3.14)$$

що являють собою поліноми степені n .

Розв'язок рівнянь (3.12) – (3.14) дозволяє отримати ряд ортогональних функцій, обмежених інтервалом $x \in [-1, 1]$ і описуваних виразами (3.15).

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &= 1, \\
 T_1(x) &= x, \\
 T_2(x) &= 3x^2 - 1, \\
 T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
 T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\
 T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\
 T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\
 T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Для реалізації алгоритму необхідно визначити степінь поліному n поліному $T(x)$, а також межі a і b зміни аргументу x . Для $i = 0, 1, \dots, n$ на відрізку $[-1, 1]$ потрібно сформувати сітку оптимальних значень аргументу у вузлах чебишевської інтерполяції

$$x'_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.16}$$

Після цього значення x'_i приводиться до відрізка $[a, b]$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x'_i. \tag{3.17}$$

Для $k = 0, 1, \dots, n$ та $i = 0, 1, \dots, n$ розраховуються коефіцієнти C_k

$$C_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \cos\left(\frac{k\pi(2i+1)}{2(n+1)}\right). \tag{3.18}$$

В результаті розрахунків отримуються коефіцієнти C_0, C_1, \dots, C_n поліному $T(x')$, який припасовує функцію $f(x)$, тобто здійснюється апроксимація $f(x)$ поліномом $T(x')$.

3.2 Згладжування даних експерименту

Згладжування даних експерименту є спеціальною процедурою осереднення за допомогою інтерполяційних поліномів, яка дозволяє отримати уточнене значення \bar{y}_i за заданим значенням y_i та ряду найближчих значень $\dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+2}, \dots$, відомих із випадковою похибкою.

Лінійне згладжування за трьома точками реалізується за допомогою формул:

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 &= \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6}; \\ \bar{y}_i &= \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}, 1 \leq i \leq n-1; \\ \bar{y}_n &= \frac{5y_n + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{6}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Лінійне згладжування за п'ятьма точками передбачає використання формул:

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 &= \frac{3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4}{5}; \\ \bar{y}_1 &= \frac{4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3}{10}; \\ \bar{y}_i &= \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}, 2 \leq i \leq n-2; \\ \bar{y}_{n-1} &= \frac{y_{n-3} + 2y_{n-2} + 3y_{n-1} + 4y_n}{10}; \\ \bar{y}_n &= \frac{3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4}}{5}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Нелінійне згладжування за сімома точками забезпечує осереднення на засадах полінома третьої степені і реалізується за допомогою формул:

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 &= \frac{39y_0 + 8y_1 - 4(y_2 + y_3 - y_4) + y_5 - 2y_6}{42}; \\ \bar{y}_1 &= \frac{8y_0 + 19y_1 + 16y_2 + 6y_3 - 4y_4 - 7y_5 + 4y_7}{42}; \\ \bar{y}_2 &= \frac{-4y_0 + 16y_1 + 19y_2 + 12y_3 + 2y_4 - 4y_5 + y_6}{42};\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\bar{y}_i = \frac{7y_i + 6(y_{i+1} + y_{i-1}) + 3(y_{i+2} + y_{i-2}) - 2(y_{i+3} + y_{i-3})}{21}, 3 \leq i \leq n-3;$$

$$\bar{y}_{n-2} = \frac{y_{n-6} - 4y_{n-5} + 2y_{n-4} + 12y_{n-3} + 19y_{n-2} + 16y_{n-1} - 4y_n}{42};$$

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{4y_{n-6} - 7y_{n-5} - 4y_{n-4} + 6y_{n-3} + 16y_{n-2} + 19y_{n-1} + 8y_n}{42};$$

$$\bar{y}_n = \frac{-2y_{n-6} + 4y_{n-5} + y_{n-4} - 4y_{n-3} - 4y_{n-2} + 8y_{n-1} + 39y_n}{42}.$$

Приклади лінійного згладжування за трьома і п'ятьма точками наведені у табл. 3.2, а нелінійного за сімома – у табл. 3.3.

Таблиця 3.2 – Приклад лінійного згладжування за трьома і п'ятьма точками ($n = 9$)

i	y_i	\bar{y}_i за 3 точками	\bar{y}_i за 5 точками	Точне значення y	i	y_i	\bar{y}_i за 3 точками	\bar{y}_i за 5 точками	Точне значення y
0	0,9	0,97	0,992	1	5	6,1	5,97(3)	6,044	6
1	2,12	1,98	1,995	2	6	6,92	7,05(6)	7,024	7
2	2,92	3,06(3)	2,998	3	7	8,15	8,04	8,004	8
3	4,15	3,99	4,038	4	8	9,05	9	8,957	9
4	4,9	5,05	4,998	5	9	9,8	9,825	9,91	10

Таблиця 3.3 – Приклад лінійного згладжування за сімома точками ($n = 9$)

i	y_i	\bar{y}_i за 7 точками	Точне значення y	i	y_i	\bar{y}_i за 7 точками	Точне значення y
0	0,7	0,7011429	0,69314718	5	1,99	1,950952381	1,945910149
1	1,08	1,0871429	1,09861228	6	2,04	2,07(3)	2,079441542
2	1,39	1,385	1,38629436	7	2,22	2,191428571	2,197224577
3	1,64	1,6242857	1,60932791	8	2,28	2,302857143	2,302585093
4	1,76	1,7995238	1,79175946	9	2,42	2,412619048	2,397895273

3.3 Регресійний аналіз

Суть регресійного аналізу полягає в описанні «природи» впливу ознак-факторів на ознаку-результат, який у конкретних практичних задачах виступає об'єктом. Це передбачає теоретичний аналіз явища, що вивчається, з метою визначення переліку факторів, які впливають на результативну ознаку. На базі кореляційного аналізу визначається наявність статистично значущих зв'язків для конкретних умов. Після цього формується рівняння регресії, тобто в аналітичному вигляді по-

дається залежність. **Рівняння регресії** являє собою математичну функцію, яка описує залежність умовного середнього значення результату (залежної змінної) від заданих значень факторних (незалежних) змінних. Таким чином, рівняння регресії віддзеркалює основну тенденцію зв'язку, характерну для статистичної сукупності в цілому. При регресійному аналізі можна виділити три процедури:

- визначення типу функції (структури моделі) для описання залежності, що вивчається;
- розрахунок невідомих параметрів рівняння регресії;
- оцінку адекватності розробленої моделі.

Нещодавно перераховані процедури були послідовними елементами регресійного аналізу, але бурхливий розвиток комп'ютерних систем та інформаційних технологій дозволив їх об'єднати і виконувати в комплексі.

Перший етап регресійного аналізу полягає у пошуку функції, яка найкраще апроксимувала б залежність. При цьому потрібно враховувати природу аналізованих показників, їх взаємозв'язок та властивості математичних функцій. Але широке розповсюдження комп'ютерної техніки, обсяг її пам'яті та швидкодія дозволяють створювати декілька моделей і, користуючись певними критеріями, вибрати з них найкращу. В якості таких критеріїв можуть виступати максимум F-критерію Фішера, мінімум середньої похибки апроксимації тощо.

Лінійний парний регресійний аналіз полягає у визначенні параметрів емпіричної залежності

$$y(x) = b_1x + b_0. \quad (3.22)$$

Графічно цю задачу можна інтерпретувати як знаходження серед масиву точок $x_i y_i$ такої прямої, щоб величина всіх середньоквадратичних відхилень була мінімальною

$$\Delta = \sum_{i=0}^n (y_i - y(x_i))^2 = \min, \quad (3.23)$$

де y_i – експериментально зняті значення;

$y(x_i)$ – рівняння регресії.

Для розв'язання рівняння (3.23) потрібно прирівняти до нуля часткові похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta}{\partial b_0} &= \sum_{i=0}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_i)); \\ \frac{\partial \Delta}{\partial b_1} &= \sum_{i=0}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_i)) x_i,\end{aligned}\tag{3.24}$$

що дає можливість визначення коефіцієнтів b_1 та b_0 через систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}b_0 n + b_1 \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=0}^n x_i + b_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i,\end{aligned}\tag{3.25}$$

звідки

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{\sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n y_i - (n+1) \sum_{i=0}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 - (n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2}; \\ b_0 &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n y_i - b_1 \sum_{i=0}^n x_i \right).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Середньоквадратична похибка визначається виразом

$$\sigma^2 = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n y_i^2 - b_1 \sum_{i=0}^n y_i - b_0 \sum_{i=0}^n x_i y_i \right).\tag{3.27}$$

Нелінійна парна регресія полягає у знаходженні нелінійної залежності $y(x)$.

Гіперболічна регресія полягає у знаходженні параметрів функції

$$y(x) = b_0 + \frac{b_1}{x}\tag{3.28}$$

з рішення системи рівнянь

$$\begin{aligned}
b_0(n+1) + b_1 \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} &= \sum_{i=0}^n y_i; \\
b_0 \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} + b_1 \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} &= \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{x_i}.
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Степеневая регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$y = b_0 x^{b_1} \tag{3.30}$$

за формулами

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sum_{i=0}^n \ln x_i \sum_{i=0}^n \ln y_i - (n+1) \sum_{i=0}^n \ln x_i \ln y_i}{\left(\sum_{i=0}^n \ln x_i \right)^2 - (n+1) \sum_{i=0}^n (\ln x_i)^2}; \\
b_0 &= \exp \left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \ln y_i - b_1 \sum_{i=0}^n \ln x_i \right) \right).
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

Показова регресія забезпечує отримання параметрів функції

$$y = b_0 b_1^x \tag{3.32}$$

з розв'язку системи рівнянь

$$\begin{aligned}
(n+1) \lg b_0 + \lg b_1 \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n \lg y_i; \\
\lg b_0 \sum_{i=0}^n x_i + \lg b_1 \sum_{i=0}^n \lg x_i^2 &= \sum_{i=0}^n (x_i \lg y_i).
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

Експоненціальна регресія забезпечує отримання параметрів функції

$$y = b_0 \cdot \exp(b_1 x) \tag{3.34}$$

за формулами

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n \ln y_i - (n+1) \sum_{i=0}^n x_i \ln y_i}{\left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 - (n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2}; \\
b_0 &= \exp \left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \ln y_i - b_1 \sum_{i=0}^n x_i \right) \right).
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

Логарифмічна регресія дає параметри функції

$$b_0 + b_1 \cdot \lg x \quad (3.36)$$

з рішення системи рівнянь

$$\begin{aligned} b_0(n+1) + b_1 \sum_{i=0}^n \lg x_i &= \sum_{i=0}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=0}^n \lg x_i + b_1 \sum_{i=0}^n (\lg x_i)^2 &= \sum_{i=0}^n (y_i \lg x_i). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Параболічна регресія забезпечує трьох параметрів b_0 , b_1 та b_2 наближення параболічною функцією

$$y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad (3.38)$$

з рішення системи трьох рівнянь

$$\begin{aligned} b_0(n+1) + b_1 \sum_{i=0}^n x_i + b_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=0}^n x_i + b_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i; \\ b_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Регресія вищих порядків зводиться до апроксимації чи інтерполяції, що розглянуто раніше.

Рівняння множинного регресійного аналізу в загальному вигляді записується у вигляді

$$\bar{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k. \quad (3.40)$$

Специфічною проблемою, яку вирішують при цьому, є відбір факторів, що включаються до рівняння регресії. Для отримання надійних оцінок потрібно, щоб кількість таких факторів була мінімум у п'ять разів меншою обсягу сукупності, що вивчається. Критерієм відбору може виступати кореляційний критерій. При цьому відкидаються ті, коефіцієнт кореляції яких малий ($r < 0,3$). Крім цього, одночасно не

потрібно включати фактори, між якими існує чітка функціональна залежність. Для наочності використовують матрицю парних коефіцієнтів кореляції (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Матриця парних коефіцієнтів кореляції

Ознака	y	x_1	x_2	...	x_k
y	1	r_{yx1}	r_{yx2}	...	r_{yjk}
x_1	...	1	r_{x1x2}	...	r_{x1jk}
x_2	1	...	r_{x2jk}
\vdots
x_k	1

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right)}{n + 1}, \quad (3.41)$$

де \bar{x} – середнє значення фактору x ;

\bar{y} – середнє значення результату y .

Оскільки матриця симетрична відносно одиничної діагоналі достатньо скласти лише одну її половину. Верхній рядок надасть відомості про зв'язок кожного фактора із залежною змінною, звідки можна здійснювати їх відбір. Інші клітини табл. 3.4 дозволять встановити зв'язок між парами факторів. Якщо коефіцієнт кореляції великий ($r > 0,7$), то один з факторів можна не включати до моделі.

Розрахунок параметрів рівняння множинної регресії здійснюється на засадах методу найменших квадратів. Параметри a_k при факторах рівняння множинної регресії називають умовно чистими. Вони були б чистими, якби вдалося врахувати всі фактори, які впливають на результат, але це практично неможливо. Умовно чисті коефіцієнти регресії дозволяють оцінити вплив кожної незалежної змінної на результат за умови виключення впливу інших. Крім цього, незалежні змінні можуть мати (а це буває найчастіше) різні одиниці виміру, тому отримані коефіцієнти регресії не співставляються і не можуть бути ранжовані за впливом на результат.

Для порівняння впливу окремих факторів на результат розраховуються відносні коефіцієнти еластичності та β . Часткові коефіцієнти еластичності K_E розраховуються за формулою

$$K_{E.k} = a_k \frac{\bar{x}_k}{\bar{y}}, \quad (3.42)$$

де a_k – коефіцієнт регресії при k -тому факторі.

Величина цього коефіцієнта K_E показує на скільки відсотків в середньому зміниться значення залежної змінної при зміні фактора x_k на 1% від свого середнього значення за умови виключення впливу інших факторів.

β -коефіцієнт показує на яку частину свого середньоквадратичного відхилення зміниться результат, якщо відповідний фактор зміниться на величину свого середньоквадратичного відхилення

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{x.k}}{\sigma_y}. \quad (3.43)$$

Порівнюючи значення часткових коефіцієнтів еластичності та β -коефіцієнтів можна виділити фактори, вплив яких на результат буде переважним.

Оцінка адекватності рівняння множинної регресії здійснюється класичним методом: статистична значущість параметрів – за t -статистикою, а рівняння в цілому – за допомогою критерію Фішера.

3.4 Основи дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз також є одним з методів вивчення впливу одного чи декількох факторів на результат дослідів. Якщо результати спостережень пов'язані з деякими незалежними факторами, то можна розділити їх внески, аналізуючи співвідношення між їх дисперсіями. Таким чином, загальна дисперсія відгуку розкладається на незалежні випадкові доданки, зумовлені дією незалежних факторів, і залишкову дисперсію, пов'язану з помилками під час планування і проведення експерименту. Рішення щодо суттєвості впливу певного фактора на

результат експерименту залежить від того, наскільки значущою є складова дисперсії, зумовлена цим фактором, порівняно з дисперсією, яку викликали помилки експерименту. Залежно від кількості факторів виділяють однофакторний та багатфакторний дисперсійний аналіз.

Найбільш простим є випадок, коли перевіряється дія лише одного фактора. Для підтвердження наявності зв'язку між ознакою, що лягла в основу групування, і результативною ознакою необхідно перевірити гіпотезу щодо суттєвості розходження деяких середніх величин.

Якщо всі n дослідів розділені на k груп, то варіацію, зумовлену впливом фактора, покладеного в основу групування, характеризує міжгрупова дисперсія $\sigma^2_{\text{м}}$. Вона є мірою варіації часткових середніх по групах \bar{x}_j навколо спільного середнього \bar{x}_0 . Оцінка міжгрупової дисперсії визначається за формулою

$$D_{\text{м}} = \frac{\sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x}_0)^2 f_j}{k - 1}, \quad (3.44)$$

де f_j – кількість одиниць у j -тій групі;

\bar{x}_j – часткове середнє по j -тій групі;

\bar{x}_0 – часткове середнє по сукупності в цілому.

Варіацію, зумовлену впливом інших факторів, характеризує в кожній групі внутрішньогрупова дисперсія σ^2_j , її оцінка

$$D_j = \frac{\sum_{i=1}^{f_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{f_j - 1}. \quad (3.45)$$

Оцінка середньої з міжгрупових дисперсій

$$\bar{D} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{f_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n - k}. \quad (3.46)$$

Між спільною $D_0 = \sigma^2_0$, середньою з внутрішньогрупових $\bar{D} = \bar{\sigma}^2$ та міжгруповою $D_{\text{м}} = \sigma^2_{\text{м}}$ дисперсіями існує співвідношення

$$\sigma_0^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_m^2. \quad (3.47)$$

Якщо фактор, що покладений в основу групування, не впливає на варіацію ознаки, що вивчається, то дисперсія групових середніх буде віддзеркалювати вплив інших факторів, які визначають варіацію всередині груп, а тому відношення дисперсій буде близьким до одиниці або відрізнятися від неї за рахунок випадкових коливань.

Дисперсійне співвідношення має вигляд

$$F = \frac{\sigma_m^2}{\bar{\sigma}^2}. \quad (3.48)$$

Якщо середні в двох вибірках рівні, то можна очікувати порівняно невелику розбіжність вибірових середніх за рахунок суто випадкової мінливості. Тому в цьому випадку внутрішньогрупова дисперсія буде практично співпадати зі спільною дисперсією, яка підраховується без врахування групової належності.

Для перевірки значущості результату (тобто випадковості чи не випадковості відхилення двох дисперсій) враховується кількість ступенів волі. Для розрахунку міжгрупової дисперсії кількість ступенів волі дорівнює $d.f_1 = k - 1$, а для розрахунку внутрішньогрупової – $d.f_2 = n - k$. Граничний розмір відхилень внутрішньогрупової дисперсії від спільної встановлюють за таблицями критерію Фішера. Числа в цій таблиці більші за одиницю і при розрахунку експериментального значення F завжди більшу дисперсію ділять на меншу.

Якщо $F > F_T$, то із заданою імовірністю можна стверджувати, що між факторною і результативною ознаками існує взаємозв'язок.

Нехай для різних умов визначався вік працюючих пенсіонерів, в тому числі і військових (табл. 3.5). Необхідно визначити чи існує залежність між умовами розташування і віком пенсіонерів з гарантованою імовірністю 0,95.

Таблиця 3.5 – Вхідні дані для прикладу дисперсійного аналізу

Умови	Вік	f_j
Міста	70,5; 71,8; 69,8; 58,9; 68,7; 72,1; 70,3; 69,1; 72,0; 58,7; 66,2	11
Райцентри	58,9; 59,1; 60,1; 62,2; 60,5; 58,4; 59,0; 61,8	8
Села	54,2; 58,8; 56,6; 55,0; 56,4	5

Факторна ознака – умови, результативна ознака – вік. Для кожної групи визначається середній вік:

$$\text{міста} - \bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{i,1}}{11} = 68,0;$$

$$\text{райцентри} - \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_{i,2}}{8} = 60,0;$$

$$\text{села} - \bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_{i,2}}{5} = 56,2;$$

$$\text{спільне середнє} - \bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_i}{24} = 62,9.$$

Щоб встановити чи є ця різниця суттєвою і викликаною різними умовами, треба визначити дисперсійне відношення

$$\sigma_m^2 = \frac{(68,0 - 62,9)^2 \cdot 11 + (60,0 - 62,9)^2 \cdot 8 + (56,2 - 62,9)^2 \cdot 5}{3 - 1} = 288,92;$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} (x_{i,1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^8 (x_{i,2} - \bar{x}_2)^2 + \sum_{i=1}^5 (x_{i,3} - \bar{x}_3)^2}{24 - 3} = 12,5;$$

$$F = \frac{288,92}{12,5} = 23,11.$$

При імовірності 0,95 і кількості ступенів волі дорівнює $d.f_1 = 2$ і $d.f_2 = 21$ згідно таблиці критерію Фішера $F_T = 3,467$. Умова $F > F_T$ виконується, тобто умови мають суттєвий вплив на вік.

3.5 Спектральний, секвентний та вейвлет-аналіз

Спектром часової залежності (функції) $y(t)$ називають сукупність її гармонічних складових (гармонік), які утворюють ряд Фур'є.

Спектральний аналіз періодичних функцій полягає у знаходженні коефіцієнтів a_k та b_k ряду Фур'є

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_1 t + b_k \sin 2\pi k f_1 t), \quad (3.49)$$

де f_1 – частота повторювання функції $y(t)$ (першої гармоніки);
 k – номер гармоніки.

Коефіцієнти Фур'є визначаються виразами

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos 2\pi k f_1 t dt; \quad (3.50)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin 2\pi k f_1 t dt, \quad (3.51)$$

де $T = 1/f_1$ – період повторювання функції $y(t)$.

Крім такого широко використовується ряд

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(2\pi k f_1 + \varphi_k), \quad (3.52)$$

де

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (3.53)$$

$$\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.54)$$

Спектральний аналіз неперіодичних (фінітних) функцій, тобто функцій повністю визначених на відрізку $[0, t_0]$, полягає в обчисленні складових їх комплексної спектральної щільності

$$S(j\omega) = S_C(\omega) + jS_S(\omega) = S(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.55)$$

де $\omega = 2\pi f$ – кутова частота,

$$S(\omega) = \sqrt{|S_C(\omega)|^2 + |S_S(\omega)|^2} \quad (3.56)$$

та

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{S_S(\omega)}{S_C(\omega)} \right). \quad (3.57)$$

При цьому

$$S_C = \int_0^{t_0} y(t) \cos \omega t dt ; \quad (3.58)$$

$$S_S = \int_0^{t_0} y(t) \sin \omega t dt . \quad (3.59)$$

Чисельний спектральний аналіз полягає у знаходженні коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ для періодичної функції $y(t)$, заданої на відрізку $[0, T]$ дискретними підрахунками. Він зводиться до обчислення (3.50) та (3.51) за формулами чисельного інтегрування методом прямокутників

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos 2\pi k f_1 \Delta t ; \quad (3.60)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin 2\pi k f_1 \Delta t , \quad (3.61)$$

де $\Delta t = T/N$ – крок дискретизації функції $y(t)$.

Для фінітних функцій

$$S_C = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos(2\pi f \Delta t_i) ; \quad (3.62)$$

$$S_S = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin(2\pi f \Delta t_i) ; \quad (3.63)$$

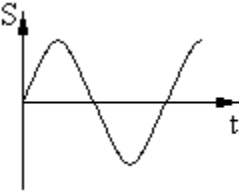
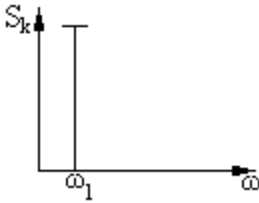
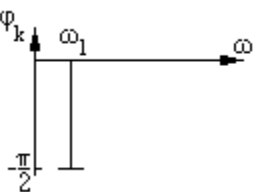
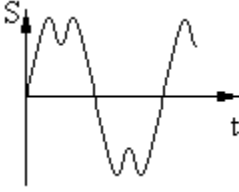
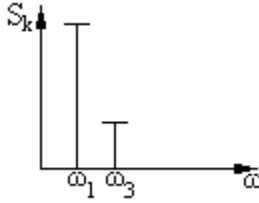
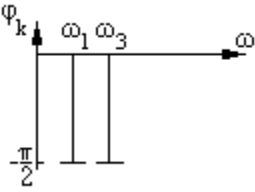
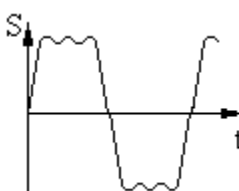
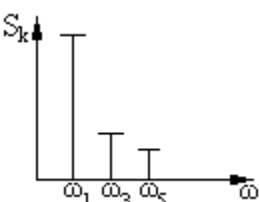
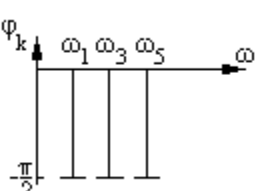
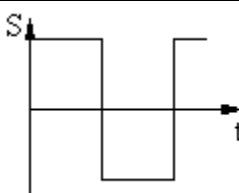
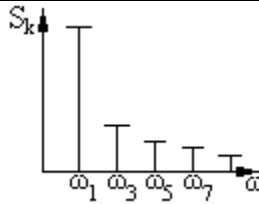
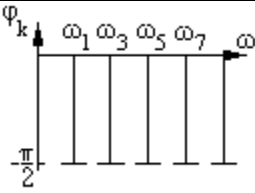
Знайдені за (3.60) та (3.61) коефіцієнти Фур'є для $m = N/2$ гармонік наближають функцію $y(t)$ рядом (3.49) з найменшою середньоквадратичною похибкою. Таким чином, чисельний спектральний аналіз є різновидом метода найменших квадратів коли $y(t)$ наближають тригонометричним рядом.

Якщо сигнал складається з однієї гармоніки

$$S(t) = S \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.64)$$

то характеристики сигналу можна зобразити у вигляді, поданому у табл. 3.6. Аналогічно можна подати характеристики інших коливань, що вміщують в собі дві, три та безкінцеву кількість непарних гармонік. Діаграми розподілення амплітуд та фаз за частотою гармонік називаються відповідно **спектром амплітуд** та **спектром фаз**.

Таблиця 3.6 – Спектральні характеристики сигналів

Аналітичний вираз	Зображення	Спектр амплітуд	Спектр фаз
$S(t) = S \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$			
$S(t) = S \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{S}{3} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$			
$S(t) = S \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{S}{3} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{S}{5} \cos\left(\omega_5 t - \frac{\pi}{2}\right)$			
$S(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{S}{k} \times \cos\left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$			

Повний спектральний аналіз необхідний також і для оцінки кроку дискретизації. Якщо неперервний сигнал має обмежений спектр частот, то він завжди може бути перетворений на свої значення в окремі моменти часу, тобто перетворений на послідовний у часі ряд значень. Можливість такої заміни вперше була обґрунтована в 1933 році В.А. Котельніковим та сформульована у вигляді теореми: «Якщо функція $x(t)$ не вміщує в собі частот, вищих за f_{\max} , то вона повністю визначається своїми миттєвими значеннями в моменти часу, що ле-

жать у віддаленні один від одного на $\frac{1}{2f_{\max}}$ ». В деякій літературі її називають ще *теоремою відрахунків*.

Тобто якщо знати максимальну частоту сигналу, то частоту дискретизації треба вибирати вдвічі більшою. На практиці сигнали переважно мають безкінцевий спектр гармонік, тому його штучно обмежують, відкидаючи гармоніки з малими амплітудами. Поріг визначається енергією сигналу, яку потрібно зберегти (зазвичай 95%). При цьому інформація частково втрачається, але значно спрощується процедура реєстрації і оброблювання.

Для спектрального аналізу, при якому необхідно оцінити обмежену кількість гармонік, доцільно використовувати спрощені методи.

Метод п'яти ординат забезпечує обчислення постійної складової Y_0 та чотирьох перших гармонік $Y_1 \div Y_4$:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{y_1 + 2y_2 + 2y_4 + y_5}{6}; \\ Y_1 &= \frac{y_1 + y_2 - y_4 - y_5}{3}; \\ Y_2 &= \frac{y_1 - 2y_3 + y_5}{4}; \\ Y_3 &= \frac{y_1 - 2y_2 + 2y_4 - y_5}{6}; \\ Y_4 &= \frac{y_1 - 4y_2 - 4y_4 + y_5}{12}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Метод семи ординат за своєю сутністю є аналогічним, але дозволяє визначити постійну складової Y_0 і шість перших гармонік $Y_1 \div Y_6$, як показано у (3.66).

Метод дванадцяти ординат є найпростішою реалізацією швидкого перетворення Фур'є і дозволяє обчислити коефіцієнти $b_0 \div b_6$ та $a_0 \div a_5$ за виразами (3.67).

$$\begin{aligned}
Y_0 &= y_4 + \frac{-270\alpha_1 + 756\alpha_2 + 334\alpha_3}{2560}; \\
Y_1 &= \frac{-180\beta_1 + 1008\beta_2 + 668\beta_3}{2560}; \\
Y_2 &= \frac{-1215\alpha_1 + 486\alpha_2 + 559\alpha_3}{2560}; \\
Y_3 &= \frac{-630\beta_1 - 360\beta_2 + 450\beta_3}{2560}; \\
Y_4 &= \frac{270\alpha_1 - 756\alpha_2 + 306\alpha_3}{2560}; \\
Y_5 &= \frac{810\beta_1 - 648\beta_2 + 162\beta_3}{2560}; \\
Y_6 &= \frac{1215\alpha_1 - 486\alpha_2 + 81\alpha_3}{2560},
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\text{де } \alpha_1 = y_3 - 2y_4 + y_5;$$

$$\alpha_2 = y_2 - 2y_4 + y_6;$$

$$\alpha_3 = y_1 - 2y_4 + y_7;$$

$$\beta_1 = y_5 - y_3;$$

$$\beta_2 = y_6 - y_2;$$

$$\beta_3 = y_7 - y_1.$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\theta_1/2 + \sqrt{3}\theta_2/2 + \theta_3}{6}; & b_1 &= \frac{d_0 + \sqrt{3}d/2 + d_2/2}{6}; \\
a_2 &= \frac{\sqrt{3}/2 (\eta_1 + \eta_2)}{6}; & b_2 &= \frac{\sigma_0 + \sigma_1/2 - \sigma_2/2 - \sigma_3}{6}; \\
a_3 &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{6}; & b_3 &= \frac{d_0 - d_2}{6}; \\
a_4 &= \frac{\sqrt{3}(\eta_1 - \eta_2)}{2}; & b_4 &= \frac{\sigma_0 - \sigma_1/2 - \sigma_2/2 + \sigma_3}{6}; \\
a_5 &= \frac{\theta_1/2 - \sqrt{3}\theta_2/2 + \theta_3}{6}; & b_5 &= \frac{d_0 - \sqrt{3}d_1/2 + d_2/2}{6}; \\
b_0 &= \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{12}; & b_6 &= \frac{\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3}{12},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

де:

$$\theta_1 = c_1 + c_5; \quad \theta_2 = c_2 + c_4; \quad \theta_3 = c_3;$$

$$\eta_1 = c_1 - c_5; \quad \eta_2 = c_2 - c_4;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= s_0 + s_6; & \sigma_1 &= s_1 + s_5; & \sigma_2 &= s_2 + s_4; & \sigma_3 &= s_3; \\
d_0 &= s_0 - s_6; & d_1 &= s_1 - s_5; & d_2 &= s_2 - s_4; \\
s_0 &= y_{12}; & s_1 &= y_1 + y_{11}; & s_2 &= y_2 + y_{10}; & s_3 &= y_3 + y_9; \\
c_1 &= y_1 - y_{11}; & c_2 &= y_2 - y_{10}; & c_3 &= y_3 - y_9; \\
s_4 &= y_4 + y_8; & s_5 &= y_5 + y_7; & s_6 &= y_6; \\
c_4 &= y_4 - y_8; & c_5 &= y_5 - y_7.
\end{aligned}$$

При гармонічних (синусоїдних та косинусоїдних) збудженнях, коливання зберігають свою форму під час проходження їх через будь-яку лінійну систему. Вихідні коливання можуть відрізнятися при цьому від вхідних лише амплітудою та фазою. На цьому базується частотний метод досліджень, пов'язаний з визначенням енергетичного спектра сигналів.

Разом з тим, перетворенням Фур'є властивий недолік, якого позбавлені перетворення Уолша. В галузі оброблювання сигналів, управління, зв'язку, а також інших галузях техніки перетворення час-то здійснюються в режимі реального часу, коли важливим є зведення до мінімуму часу комп'ютерного виконання операцій. Щодо перетворень Фур'є, суттєвим перспективним кроком стало розроблення різних алгоритмів швидкого перетворення, але при цьому все ж таки зберігається великий обсяг операцій множення, що займають більшу частину машинного часу оброблювання даних. Операції множення здійснюються одна за одною під час розкладання функцій в ряд Фур'є та при виконанні інтегрального перетворення Фур'є.

При розкладанні функції в ряд Фур'є кожне з великої кількості значень функції $y(t)$ необхідно помножити на значення $\cos k\omega_1 t$ для конкретного значення t . Обчислюється сума всіх результатів множень, за якими розраховується значення інтеграла і потім величина a_k . Цей алгоритм повторюється для всіх k . Аналогічно визначаються коефіцієнти синусних функцій b_k .

При цьому, хоча для ряду функцій достатньо задовільна їх апроксимація виявляється при визначенні невеликої кількості коефіцієн-

тів ряду Фур'є, але зазвичай для більшості реальних сигналів вимога швидкого збігу ряду не виконується.

Кусково-постійна функція має на виділеному інтервалі часу постійне значення. Для формули (3.49) під час визначення коефіцієнтів у виразах (3.50) та (3.51) замість функції косинуса (чи синуса при визначенні коефіцієнтів b_k) необхідно ставити постійне значення. Якщо ж значення базисної функції на інтервалах мають значення +1, -1 чи 0, то взагалі відпадає необхідність у виконанні операцій множення. Таким чином, процедура визначення коефіцієнтів зводиться до виконання операцій додавання, які є значно простішими від множення. Відсутня необхідність також у підрахунку значень синуса та косинуса, які теж не є досить простими. В першу чергу саме це забезпечує широке використання функцій Уолша, яке називається **секвентним аналізом**.

Функції Уолша, що мають вигляд, поданий на рис. 1.5, описуються різницеvim рівнянням

$$wal(2j + p, \theta) = (-1)^{\text{int}\left(\frac{j}{2}\right)+p} \left(wal\left(j, 2\left(\theta + \frac{1}{4}\right)\right) + (-1)^{j+p} wal\left(j, 2\left(\theta - \frac{1}{4}\right)\right) \right), \quad (3.68)$$

де: $\text{int}\left(\frac{j}{2}\right)$ – найбільше ціле значення числа, меншого чи рівного

$$\frac{j}{2};$$

$$p = 0 \text{ або } 1;$$

$$j = 0, 1, 2, \dots;$$

$$wal(0; \theta) = 1 \text{ для } -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2};$$

$$wal(0; \theta) = 0 \text{ для } \theta < -\frac{1}{2}, \theta > \frac{1}{2}.$$

В результаті оброблювання цифрових сигналів формуються кодові комбінації. Оскільки сьогодні найчастіше використовуються процесорні схеми, то кодова комбінація восьмибітова, і спектр буде вміщувати максимально вісім гармонік.

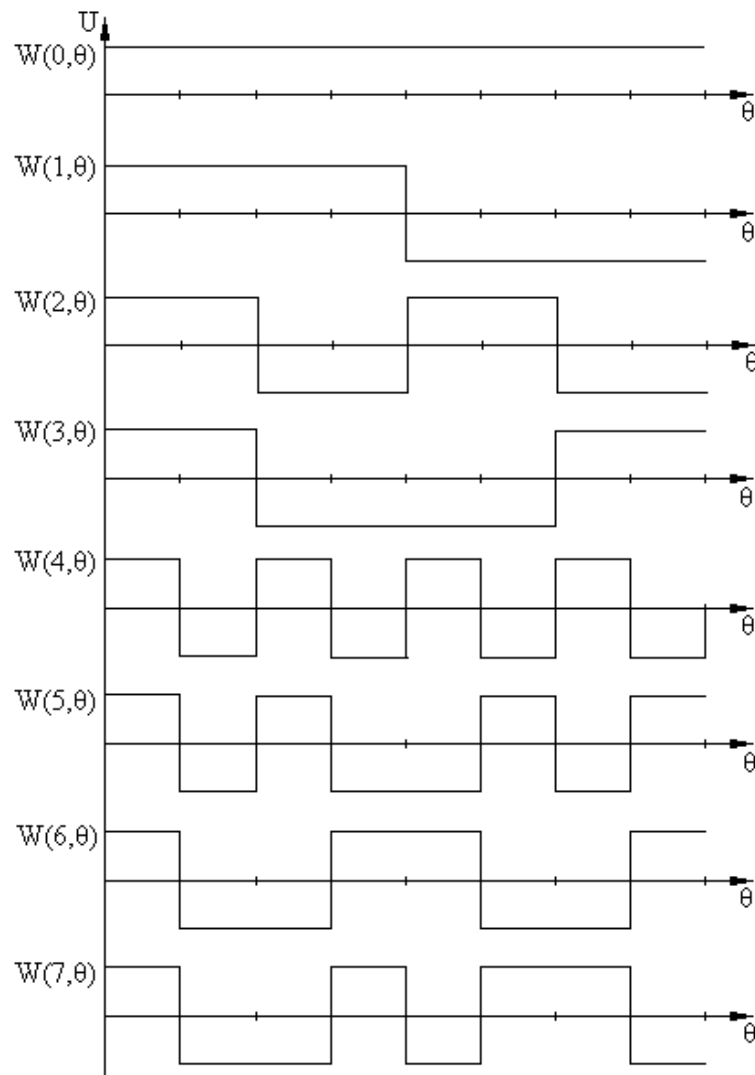


Рис. 3.1 – Перші вісім функцій Уолша

Аналогічно спектру частот, що отримується для ряду Фур'є, розкладання функції чи кодової комбінації по функціям Уолша здійснюється у відповідності з формулою

$$S(\theta) = \frac{1}{\theta_{\max}} \cdot \sum_{i=0}^{\theta_{\max}} \sum_{j=0}^{\theta_{\max}} f(j) \cdot wal(i, \theta). \quad (3.69)$$

Згідно цього алгоритму, спектр кодової комбінації 11111101 для уніполярного режиму буде становити

$$S_1(\theta) = \frac{1}{8} (7wal(0, \theta) + wal(1, \theta) + wal(2, \theta) - wal(3, \theta) - wal(4, \theta) +$$

$$+ wal(5, \theta) + wal(6, \theta) - wal(7, \theta)) \quad (3.70)$$

Щоб пересвідчитись у правильності апроксимації, достатньо підставити значення функцій $wal(i, \theta)$ для конкретних θ . Так:

$$S(0) = \frac{1}{8} (7 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(1) = \frac{1}{8} (7 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(2) = \frac{1}{8} (7 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(3) = \frac{1}{8} (7 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(4) = \frac{1}{8} (7 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(5) = \frac{1}{8} (7 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1) = \frac{8}{8} = 1,$$

$$S(6) = \frac{1}{8} (7 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1) = \frac{0}{8} = 0,$$

$$S(7) = \frac{1}{8} (7 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = \frac{8}{8} = 1.$$

Для біполярного режиму, спектр буде описуватись виразом

$$S_2(\theta) = \frac{1}{8} (6wal(0, \theta) + 2wal(1, \theta) + 2wal(2, \theta) - 2wal(3, \theta) - 2wal(4, \theta) + \\ + 2wal(5, \theta) + 2wal(6, \theta) - 2wal(7, \theta)) \quad (3.71)$$

Спектр кодової комбінації 10111111 для уніполярного режиму буде становити

$$S_1'(\theta) = \frac{1}{8} (7wal(0, \theta) - wal(1, \theta) - wal(2, \theta) - wal(3, \theta) + wal(4, \theta) +$$

$$+ wal(5, \theta) + wal(6, \theta) + wal(7, \theta)), \quad (3.72)$$

а для біполярного

$$S'_2(\theta) = \frac{1}{8} (6wal(0, \theta) - 2wal(1, \theta) - 2wal(2, \theta) - 2wal(3, \theta) + 2wal(4, \theta) + 2wal(5, \theta) + 2wal(6, \theta) + 2wal(7, \theta)). \quad (3.73)$$

Таким чином і для даного розкладання зберігається лише різниця в амплітудах гармонік, а не у їх складі. Відмінністю від класичного спектра, побудованого на рядах Фур'є, є те, що відновлення початкової комбінації не вміщує похибки. Це є очевидним, оскільки в першому випадку прямокутні імпульси апроксимуються синусоїдами та косинусоїдами, і повної ідентичності форми сигналу добитися неможливо в принципі. В другому випадку використовується принцип подібності і ця методична похибка відсутня.

Ще одним можливим варіантом для аналізу спектра є **вейвлет-аналіз**. Це розкладання сигналу по функціях Хаара, які мають вигляд, поданий на рис. 3.2.

Для формування функцій Хаара використовується формула

$$H_l^n(\theta) = \begin{cases} 2^{l/2}, \frac{n-1}{2^l} \leq \theta < \frac{n-1/2}{2^l} \\ -2^{l/2}, \frac{n-1/2}{2^l} \leq \theta < \frac{n}{2^l} \\ 0, \text{ інакше } \theta \end{cases}, \quad (3.74)$$

де $0 \leq l < \log_2 N$;

N – кількість формованих функцій;

$1 \leq n \leq 2^l$.

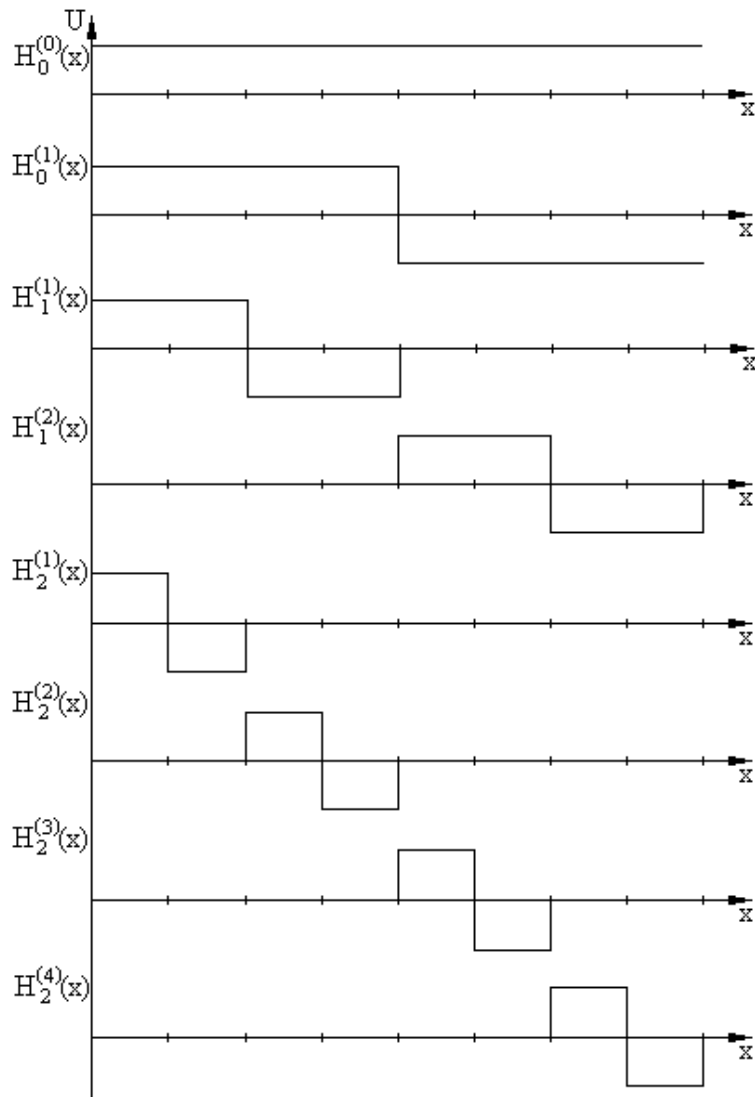


Рисунок 3.2– Перші вісім функцій Хаара

При розкладанні функції $\varphi(x)$ в ряд Хаара коефіцієнти при членах визначаються у відповідності з формулою

$$C_l^{(n)} = 2^{-\log_2 N+l} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \varphi(x) \cdot H_l^{(n)}(x) \quad (3.75)$$

Для наочності сприйняття доцільно розрахунок коефіцієнтів здійснювати у табличному вигляді (табл. 3.7).

У відповідності із складеною таблицею, функцію можна апроксимувати виразом:

$$\varphi_1(x) = \frac{7}{8} H_0^{(0)} + \frac{1}{8} H_0^{(1)} + \frac{1}{4} H_1^{(2)} - \frac{1}{2} H_2^{(4)} \quad (3.76)$$

Таблиця 3.7 – Розрахунок коефіцієнтів розкладання в ряд Хаара
уніполярної кодової комбінації 1111101

Функція	Біти								$2^{-\log_2 N+l}$	$C_l^{(n)}$
	7	6	5	4	3	2	1	0		
$\Phi(x)$	1	1	1	1	1	1	0	1		
$H_0^{(0)}$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)} \cdot \varphi(x)$	1	1	1	1	1	1	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
$H_0^{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
$H_0^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	1	1	1	-1	-1	0	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$H_1^{(1)}$	1	1	-1	-1	0	0	0	0		
$H_1^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	1	-1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
$H_1^{(2)}$	0	0	0	0	1	1	-1	-1		
$H_1^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	1	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$H_2^{(1)}$	1	-1	0	0	0	0	0	0		
$H_2^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	-1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(2)}$	0	0	1	-1	0	0	0	0		
$H_2^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(3)}$	0	0	0	0	1	-1	0	0		
$H_2^{(3)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(4)}$	0	0	0	0	0	0	1	-1		
$H_2^{(4)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	0	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Аналогічно наведеному вище прикладу, можна пересвідчитись, що вираз (3.76) описує кодову комбінацію в кожній точці. Це можна зробити, підставивши до формули значення функцій Хаара у конкретних точках:

$$\varphi(0) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + 0 - 0 = 1,$$

$$\varphi(1) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + 0 - 0 = 1,$$

$$\varphi(2) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + 0 - 0 = 1,$$

$$\begin{aligned}\varphi(3) &= \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + 0 - 0 = 1, \\ \varphi(4) &= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0 = 1, \\ \varphi(5) &= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0 = 1, \\ \varphi(6) &= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0, \\ \varphi(7) &= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Аналогічно можна скласти спектр частот Хаара і для біполярного сигналу. Результати розрахунків наведені у табл. 3.8.

Таблиця 3.8 – Розрахунок коефіцієнтів розкладання в ряд Хаара біполярної кодової комбінації 11111101

Функція	Біти								$2^{-\log_2 N+l}$	$C_l^{(n)}$
	7	6	5	4	3	2	1	0		
$\varphi(x)$	1	1	1	1	1	1	-1	1		
$H_0^{(0)}$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)} \cdot \varphi(x)$	1	1	1	1	1	1	-1	1		
$H_0^{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
$H_0^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$H_1^{(1)}$	1	1	-1	-1	0	0	0	0		
$H_1^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	1	-1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
$H_1^{(2)}$	0	0	0	0	1	1	-1	-1		
$H_1^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	1	1	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
$H_2^{(1)}$	1	-1	0	0	0	0	0	0		
$H_2^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	-1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(2)}$	0	0	1	-1	0	0	0	0		
$H_2^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(3)}$	0	0	0	0	1	-1	0	0		
$H_2^{(3)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(4)}$	0	0	0	0	0	0	1	-1		

$H_2^{(4)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$
------------------------------	---	---	---	---	---	---	----	----	---------------	----------------

В цьому випадку функцію можна описати формулою:

$$\varphi_2(x) = \frac{6}{8} H_0^{(0)} + \frac{1}{4} H_0^{(1)} + \frac{1}{2} H_1^{(2)} - H_2^{(4)} \quad (3.77)$$

Порівняння виразів (3.76) і (3.77) показує, що знов таки при зміні типу сигналу (уніполярний/біполярний) змінюються лише амплітуди гармонік, а самі частоти лишаються незмінними.

Аналогічні викладки можна провести і для кодової комбінації 10111111. Результати також доцільно подати в табличному вигляді.

Таблиця 3.9 – Розрахунок коефіцієнтів розкладання в ряд Хаара
уніполярної кодової комбінації 10111111

Функція	Біти								$2^{-\log_2 N+l}$	$C_l^{(n)}$
	7	6	5	4	3	2	1	0		
$\varphi(x)$	1	0	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)}$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)} \cdot \varphi(x)$	1	0	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
$H_0^{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
$H_0^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	0	1	1	-1	-1	-1	-1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$H_1^{(1)}$	1	1	-1	-1	0	0	0	0		
$H_1^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	0	-1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$H_1^{(2)}$	0	0	0	0	1	1	-1	-1		
$H_1^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	1	-1	-1	$\frac{1}{4}$	0
$H_2^{(1)}$	1	-1	0	0	0	0	0	0		
$H_2^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$H_2^{(2)}$	0	0	1	-1	0	0	0	0		
$H_2^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(3)}$	0	0	0	0	1	-1	0	0		
$H_2^{(3)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0

$H_2^{(4)}$	0	0	0	0	0	0	1	-1		
$H_2^{(4)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0

Спектр такої кодової послідовності буде описуватись виразом:

$$\varphi_1'(x) = \frac{7}{8} H_0^{(0)} - \frac{1}{8} H_0^{(1)} - \frac{1}{4} H_1^{(1)} + \frac{1}{2} H_2^{(1)} \quad (3.78)$$

Аналогічно буде і для біполярної комбінації.

Таблиця 3.10 – Розрахунок коефіцієнтів розкладання в ряд Хаара біполярної кодової комбінації 10111111

Функція	Біти								$2^{-\log_2 N+l}$	$C_l^{(n)}$
	7	6	5	4	3	2	1	0		
$\varphi(x)$	1	-1	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)}$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$H_0^{(0)} \cdot \varphi(x)$	1	-1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{6}{8}$
$H_0^{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
$H_0^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{2}{8}$
$H_1^{(1)}$	1	1	-1	-1	0	0	0	0		
$H_1^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{4}$
$H_1^{(2)}$	0	0	0	0	1	1	-1	-1		
$H_1^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	1	-1	-1	$\frac{1}{4}$	0
$H_2^{(1)}$	1	-1	0	0	0	0	0	0		
$H_2^{(1)} \cdot \varphi(x)$	1	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$
$H_2^{(2)}$	0	0	1	-1	0	0	0	0		
$H_2^{(2)} \cdot \varphi(x)$	0	0	1	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(3)}$	0	0	0	0	1	-1	0	0		
$H_2^{(3)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H_2^{(4)}$	0	0	0	0	0	0	1	-1		
$H_2^{(4)} \cdot \varphi(x)$	0	0	0	0	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0

Спектр такої кодової послідовності буде описуватись виразом

$$\varphi_2'(x) = \frac{6}{8} H_0^{(0)} - \frac{2}{8} H_0^{(1)} - \frac{2}{4} H_1^{(1)} + H_2^{(1)} \quad (3.79)$$

Для цієї кодової комбінації також при зміні типу сигналу також змінюються лише амплітуди.

Подані вище приклади показали, що для одних і тих самих сигналів енергетичні спектри, що описуються дискретними ортогональними функціями, займають значно меншу смугу частот ніж отримані в базисі рядів Фур'є. Але в цьому випадку необхідно і обладнання (а в першу чергу фільтри) будувати у відповідному базисі.

3.6 Фільтрація даних

Питанням боротьби із завадами присвячена велика кількість фундаментальних праць. Всі вони відзначають, що неможливо побудувати фільтр, який ефективно вилучав би завади різної природи. Тому доцільно здійснювати поетапну фільтрацію даних, як це подано на рис. 3. 3. Оскільки імпульсні завади являють собою окремі викиди, то цілком логічно вилучити спочатку їх, а потім, якщо цього виявляється недостатнім, позбавлятися від флуктуаційних завад.

Пристрої та алгоритми вилучення імпульсних завад можна розподілити на декілька класів. До першого належать способи, які базуються на обмеженні сигналів і використанні ключових схем. Але вони можуть застосовуватися лише для певних видів сигналів, до певної міри змінюють їх форму і суттєво зменшують співвідношення сигнал/шум. До другої належать адаптивні компенсаційні алгоритми. Вони досить складні, працюють при малому рівні шумів і розглядаються лише в теоретичному аспекті. Третя група вміщує алгоритми, які базуються на непараметричних методах статистики і є достатньо стійкими до дії завад. Разом з тим, вони вимагають певного навчання вибірками з ансамблю завад, елементи яких повинні бути незалежними. Використання таких алгоритмів в умовах оброблювання даних різного

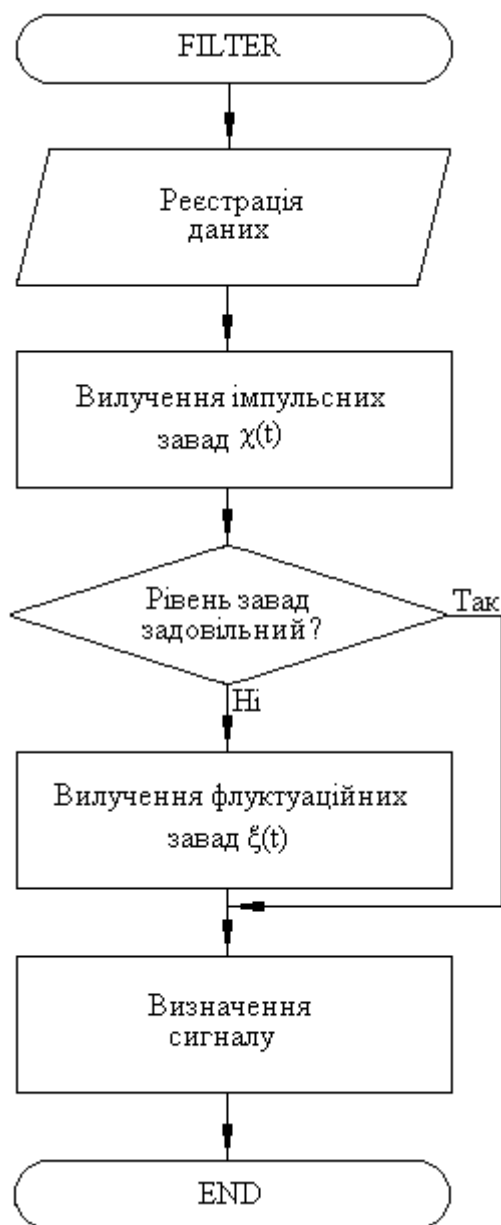


Рис. 3.3. Реалізація поетапного фільтрування прийнятого сигналу

вати вилучення флуктуаційних завад.

Медіанний фільтр являє собою ковзне вікно, яке зазвичай охоплює непарну кількість вибірок N аналогового сигналу $\hat{x}(t)$. Вихідною величиною фільтра \hat{y}_j є відрахунок, для якого у вікні існує $(N-1)/2$ відрахунків менших або рівних йому за величиною та стільки ж більших або рівних йому за величиною

типу викликає складнощі, в ршу чергу пов'язані з великою кількістю обчислень.

Останнім часом для вилучення імпульсних завад широко використовуються медіанні фільтри, які вважаються дуже перспективними. Виходячи з таких міркувань, доцільно на першому етапі здійснювати медіанну фільтрацію, яка з великою імовірністю дозволяє вилучати короткі імпульсні завади $\chi(t)$ з потоку $\hat{x}(t)$, після чого можна здійснювати додаткове оброблювання попередньо профільтованого процесу

$$\hat{x}(t) = v \cdot x(t - \tau) + \xi(t), \quad (3.80)$$

з урахуванням того, що на інтервалі $[0, T]$ існування сигналу згасання постійне ($v = \text{const}$), як це обґрунтовано вище. Якщо, після медіанної фільтрації, рівень завад не є задовільним для успішного вирішення задачі, необхідно додатково здійсню-

$$\hat{y}_j = \text{med}\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_{N-2}, \hat{x}_{N-1}\}. \quad (3.81)$$

Порядок фільтру N визначається розміром апертури (вікна), яке використовується для фільтрації. Найпростішим, за визначенням, є одновимірний медіанний фільтр із тривідрахунковим вікном. Для цього фільтра сформульовані основні принципи апаратної реалізації, але для фільтрів вищих порядків вона виявляється дуже складною. Програмна реалізація виявляється суттєво простішою, оскільки для цифрових біполярних сигналів значення вихідного сигналу дорівнює арифметичній сумі

$$\hat{y}_j = \hat{x}_j + \hat{x}_{j+1} + \dots + \hat{x}_{j+N-2} + \hat{x}_{j+N-1}. \quad (3.82)$$

Медіанний фільтр характеризується нелінійним перетворенням сигналів, оскільки його властивості не передбачають виконання умови адитивності

$$\begin{cases} \text{med}(k \cdot x(i)) = k \cdot \text{med}(x(i)); \\ \text{med}(a + x(i)) = a + \text{med}(x(i)); \\ \text{med}(x(i) + g(i)) \neq \text{med}(x(i)) + \text{med}(g(i)), \end{cases}, \quad (3.83)$$

де $\text{med}(x)$ – оператор взяття медіани;

k, a – постійні;

$x(i), g(i)$ – послідовності вибірок довжиною N .

При виділенні інформативного сигналу в широкосмуговій системі передавання медіанний фільтр повинен працювати в режимі рекурсивного формування апертури таким чином, що частина значень, які попали до апертури фільтра, є вихідними сигналами для попередніх вузлів. Визначення величин y_j для такого режиму здійснюється відповідно до виразу

$$y_j = \sum_{i=0}^{N-1} x_i, \quad (3.84)$$

$$\text{де } x_i = \begin{cases} y_i, i = 0, N-2; \\ \hat{x}_i, i = N-1; \end{cases}$$

\hat{x}_i – значення вхідного файла, що попадають до апертури;

y_j – значення вихідних сигналів рекурсивного фільтра для попередніх вузлів.

Задіяння коефіцієнту запасу медіанного фільтра надає нові властивості алгоритму фільтрації. Це дозволяє виключити ситуації, коли вхідний сигнал фільтра стає кореневим, тобто не змінюється під час проходження крізь нього. Крім цього, алгоритм медіанної фільтрації, побудований для рекурсивного режиму, має суттєво більшу спроможність для згладжування низькоамплітудного шуму.

Для такого фільтра можна достатньо просто реалізувати алгоритм швидкого оброблювання, який базується на побудові різницевих матриць за допомогою порогової функції насичення $F_{ij} = f(x_i - x_j)$, в

якій $f(\Delta x) = \begin{cases} 1, \Delta x \geq 0 \\ 0, \Delta x < 0 \end{cases}$. Для фільтра з апертурою $N = 5$ при перших

п'яти значеннях матриця **F0** буде мати вигляд

$$\mathbf{F0} = \begin{bmatrix} f(x_0 - x_0) & f(x_1 - x_0) & f(x_2 - x_0) & f(x_3 - x_0) & f(x_4 - x_0) \\ f(x_0 - x_1) & f(x_1 - x_1) & f(x_2 - x_1) & f(x_3 - x_1) & f(x_4 - x_1) \\ f(x_0 - x_2) & f(x_1 - x_2) & f(x_2 - x_2) & f(x_3 - x_2) & f(x_4 - x_2) \\ f(x_0 - x_3) & f(x_1 - x_3) & f(x_2 - x_3) & f(x_3 - x_3) & f(x_4 - x_3) \\ f(x_0 - x_4) & f(x_1 - x_4) & f(x_2 - x_4) & f(x_3 - x_4) & f(x_4 - x_4) \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

або в узагальненому вигляді

$$\mathbf{F0} = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{10} & F_{20} & F_{30} & F_{40} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} & F_{31} & F_{41} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} & F_{32} & F_{42} \\ F_{03} & F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{43} \\ F_{04} & F_{14} & F_{24} & F_{34} & F_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

Зсув на одну позицію вздовж ряду значень дає матрицю **F1**, в якій потрібно розраховувати лише дев'ять значень, розташованих у виділеній області.

$$\mathbf{F1} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} & F_{41} & \vdots & F_{51} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} & F_{42} & \vdots & F_{52} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{43} & \vdots & F_{53} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} & F_{44} & \vdots & F_{54} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ F_{15} & F_{25} & F_{35} & F_{45} & & F_{55} \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

$$F_i = \sum_{j=0}^N F_{ij} = \sum_{j=0}^N f(x_i - x_j). \quad (3.88)$$

Сума різниць значень F_{ij} за стовпчиками показує номер значення по величині i дає можливість сортувати зареєстровані значення x_j за величиною: 1 відповідає мініимальному, N – максимальному, а $(N+1)/2$ – медіанному значенню.

Оскільки реєстрацію значень, що надходять з каналу зв'язку, доцільно здійснювати з використанням АЦП, то необхідно визначити його основні параметри. Мініимальна кількість відрахунків, які необхідно зафіксувати для очищення інформативного сигналу від шуму медіанним фільтром, визначається як $N - 1/2 \cdot k_m$, де $k_m \geq 1$ – коефіцієнт запасу дискретизації сигналу.

$$T_{ADC} \leq \frac{2 \cdot k_m}{(N-1) \cdot \nu \cdot k_v} - T_{WR} - T_{RD}. \quad (3.89)$$

де T_{ADC} – тривалість циклу перетворення АЦП;

T_{WR} – тривалість програмного циклу запуску АЦП за допомогою інтерфейсної схеми до моменту подання сигналу “Пуск”;

T_{RD} – тривалість програмного циклу зчитування даних з АЦП від моменту визначення сигналу “Кінець перетворення” до моменту записування даних до пам'яті.

Опорна напруга АЦП не повинна бути меншою, ніж вхідний сигнал $\hat{x}(t)$ з урахуванням похибки квантування. Для оцінювальних розрахунків можна скористатись спрощеною формулою

$$U_{0.ADC} \geq \Delta U_{ADC} + \nu \cdot |U_c| + U_\xi, \quad (3.90)$$

$$U_{0.ADC} \cdot \left(1 - \frac{1}{N_{ADC}}\right) \geq |U_c| \cdot \left(\nu + \frac{1}{\sqrt{h^2}}\right). \quad (3.91)$$

Для двійкового аналого-цифрового перетворювача кінцева формула для визначення кількості розрядів АЦП незалежно від виду сигналу

$$n_{ADC} \geq \log_2 \left(\frac{U_{0.ADC}}{U_{0.ADC} - |U_c| \cdot \left(\nu + \frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)} \right) + 1. \quad (3.92)$$

Разом з перевагами потрібно відзначити, що використання медіанних фільтрів можливо далеко не в усіх випадках. Їх доцільно використовувати тоді, коли характеристика процесу має монотонний характер.

Для вилучення флуктуаційних завад можуть використовуватися декілька видів фільтрів. Вони будуються на базі розкладання функції, яка описує вхідний сигнал на суму базисних ортогональних функцій. Це можуть бути поліноми Чебишева, Лежанра, Уолша тощо. Останнім часом широко використовуються фільтри, реалізовані в базисі вейвлет-функцій і призначені для оброблювання відео зображень та часових рядів. Фільтр задається за допомогою оператора згортання

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\phi(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau, \quad (3.93)$$

де $h_\phi(\tau)$ – вагова функція фільтра, яка задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} h_\phi(\tau) d\tau = 1$.

Перетворенням Фур'є можна отримати

$$Y(\omega) = H_{\phi}(\omega) \cdot X(\omega) . \quad (3.94)$$

Пряме та зворотнє вейвлет-перетворення визначається парою рівнянь

$$y^{TW}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) \cdot dt , \quad (3.95)$$

$$x(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y^{TW}(a,b) \cdot \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \cdot \frac{1}{a^2 \sqrt{a}} da db . \quad (3.96)$$

Для даного випадку подавлення флуктуаційного шуму необхідно здійснювати в декілька етапів:

- розкладання сигналу в базисі вейвлету;
- вибір порогового значення шуму для кожного рівня розкладання;
- порогове фільтрування коефіцієнтів деталізації;
- реконструювання сигналу.

Розподіл сигналу на високочастотну та низькочастотну складові здійснюється за принципом кратномасштабного аналізу. Характерним є те, що для такої процедури можуть використовуватись каскадні алгоритми швидких перетворень для вейвлетів різних типів. Розкладання функцій у вейвлетні ряди на заданому рівні m виконується за формулою

$$x(t) = \sum_k c_{m,k} \cdot \varphi_{m,k} + \sum_{n>m,k} d_{n,k} \cdot \psi_{n,k} , \quad (3.97)$$

$$\text{де } c_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \varphi_{m,k}(t) \cdot dt ,$$

$$d_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi_{n,k}(t) \cdot dt .$$

Методики розкладання функцій в базисах різних вейвлет-функцій докладно розглянуті в літературі. Якщо материнська функція $\psi(t)$ та скейлінг $\varphi(t)$ існують в явному вигляді, то перетворення можна здійснювати за формулою (3.97), але в більшості випадків здійснюється конструювання вейвлетів за принципом пошуку коефіцієнтів h_k та g_k , які являють собою коефіцієнти операторів однобічних узгоджених цифрових фільтрів визначення сигналу, які в літературі називають та-

кож квадратурними дзеркальними. Використання гаусівських вейвлетів Wave та МНАТ, а також вейвлетів Морле для розв'язання цієї задачі знайшло обмежене використання. Це пов'язано з тим, що вони відносяться до грубих або комплексних вейвлетів і характеризуються відсутністю скейлінг-функції $\varphi(t)$. Материнський вейвлет $\psi(t)$ для них не має компактного носія, аналіз в цих базисах не ортогональний і повна реконструкція сигналів не гарантується. Ширше використовуються вейвлети Добеши, комплети та симлети, не дивлячись на те, що функції в явному вигляді для них не існують.

Кратномасштабний аналіз (рис. 3.4) при послідовному збільшенні значень m призводить до природної форми швидких ітераційних обчислень:

$$\begin{aligned} c_{m+1,k} &= \sum_n h_k \cdot c_{m,2k+n}, \\ d_{m+1,k} &= \sum_n g_n \cdot c_{m,2k+n}, \\ c_{0,k} &= \int_{k \cdot \Delta t}^{(k+1) \cdot \Delta t} x(t) \cdot \varphi(t-k) \cdot dt. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Останнє рівняння можна використовувати лише за наявності $x(t)$ в аналітичному вигляді. Для реальної ситуації подання сигналу $x(t)$ у вигляді часового ряду, в якості значень $c_{0,k}$ приймаються початкові значення $x(k \cdot \Delta t)$. Зворотнє швидке вейвлет-перетворення (рис. 3.4., б) являє собою послідовне збирання сигналу від великих значень m до малих

$$x(t) = \sum_{n \in I} c_{m,n} \cdot h_{k-2n} + \sum_{n \in I} d_{m,n} \cdot g_{k-2n}, \quad (3.99)$$

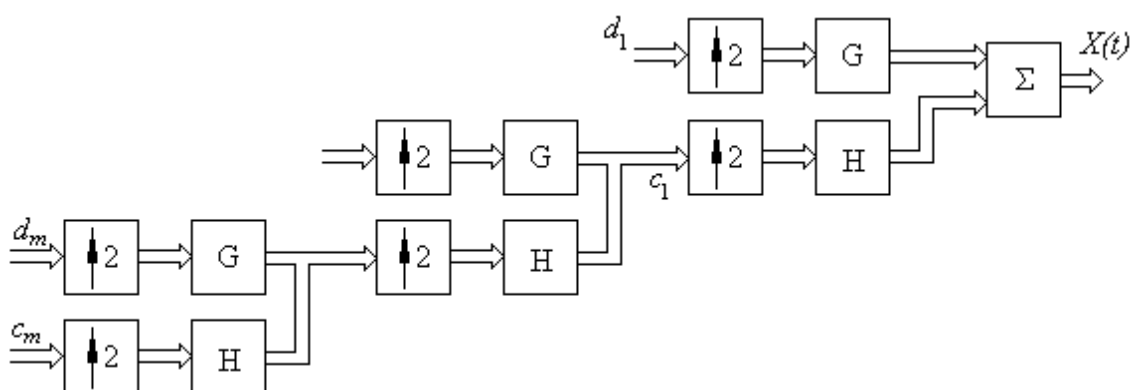
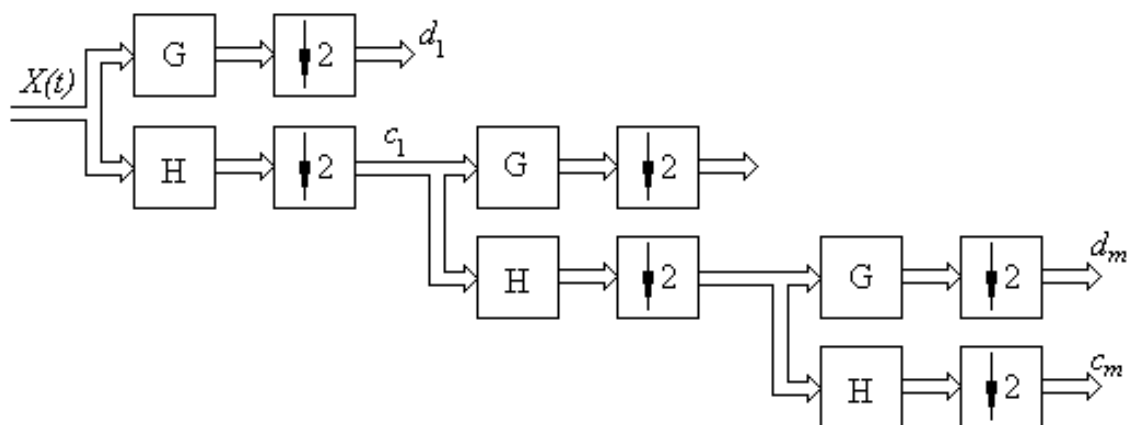
і забезпечує реконструкцію функції за значеннями її вейвлет-коефіцієнтів з будь-якого рівня розкладання. В матричному вигляді процес перетворення на кожній стадії можна подати у вигляді

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{c}_{i-1}; \quad (3.100)$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{G} \cdot \mathbf{d}_{i-1}, \quad (3.101)$$

де \mathbf{H}, \mathbf{G} – матриці коефіцієнтів $N \times N$.

a)



б)

Рис. 3.4. Структура процесу вейвлет-фільтрації: а – аналіз (розкладання) сигналу; б – синтез (відновлення) сигналу.

Для вейвлета Добеши db^4 ($M = 2$) матриця коефіцієнтів фільтра **H** має вигляд

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix}. \quad (3.102)$$

Значення коефіцієнтів h_i розраховуються для кожного з видів фільтрів окремо і для даного випадку складають: $h_0 = 0,483$, $h_1 = 0,837$, $h_2 = 0,224$, $h_3 = -0,129$. Методика розрахунку коефіцієнтів фільтрів достатньо повно розглянута в літературі [360, 364]. Матриця **G** будується аналогічно з урахуванням властивостей дзеркальності і квадратурності фільтрів

$$g_k = (-1)^k \cdot h_{2M-1-k}, \quad (3.103)$$

звідки $g_0 = h_3$, $g_1 = -h_2$, $g_2 = h_1$, $g_3 = -h_0$. Після цього необхідно здійснювати децимацію, оскільки обидві складові, що визначають характер і локалізацію сигналу мають подвійну надлишковість. З урахуванням скорочення кількості значень удвічі, матриці **H** та **G** можна подати у вигляді $(N/2) \times N$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{pmatrix}; \quad (3.104)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & -h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_3 & -h_2 \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

Повне розкладання сигналу можна здійснити за допомогою вейвлет-пакета, схема перетворення якого наведена на рис. 3.5.

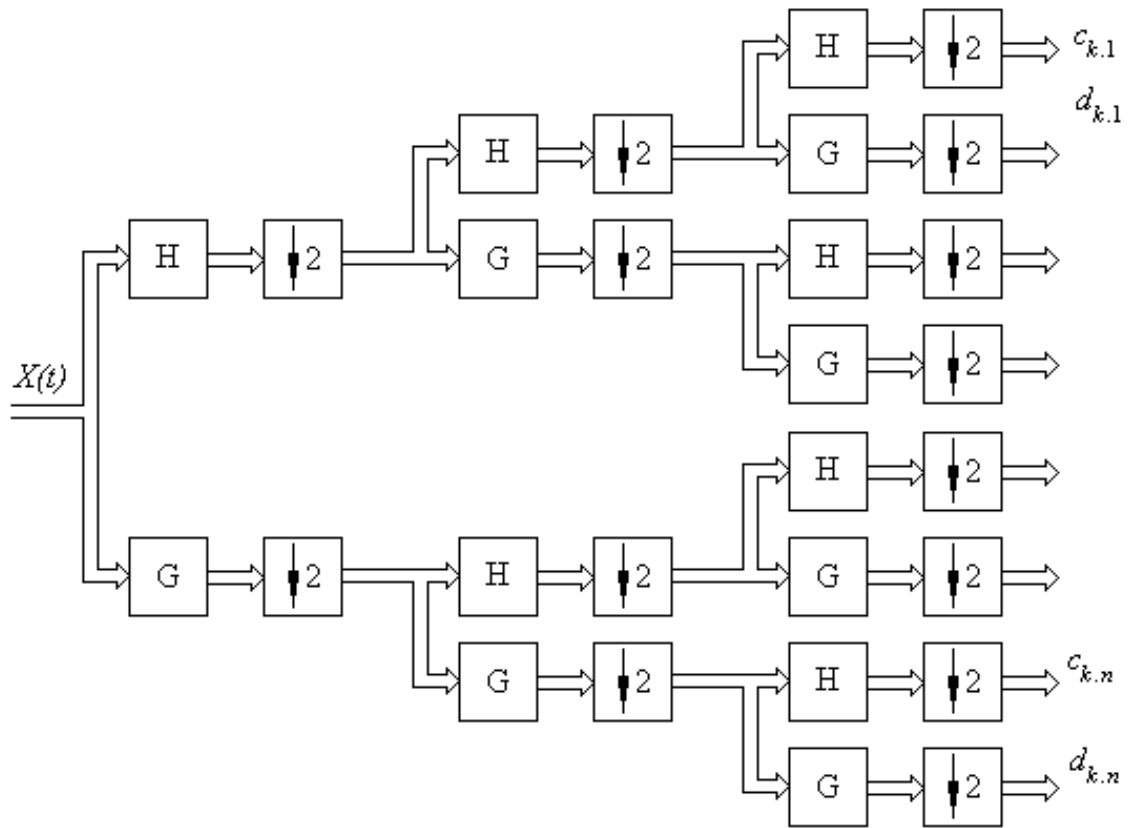


Рис. 3.5. Структура процесу фільтрації вейвлет-пакетом

Алгоритм Малла, дозволяє за допомогою коефіцієнтів h_k та g_k фільтрів здійснювати аналіз та синтез сигналів.

Оброблення високочастотних складових розкладання $TWG(x)$ можна здійснювати за жорстким або м'яким алгоритмами, які описуються відповідно (3.106) та (3.107)

$$d_m = \begin{cases} 0, |d_m| < d_{nop}; \\ d_m, |d_m| \geq d_{nop}, \end{cases} \quad (3.106)$$

$$d_m = \begin{cases} 0, |d_m| < |d_{nop}|; \\ \text{sign}(d_m)(|d_m| - |d_{nop}|), |d_m| \geq |d_{nop}|, \end{cases} \quad (3.107)$$

де d_{nop} – порогове значення коефіцієнтів.

3.7 Мета-аналіз

Різновидом наукової діяльності можна вважати проведення систематичних оглядів літератури. Воно має велике значення для проведення найбільш ефективних лікувально-профілактичних і діагностичних втручань. Міжнародна епідеміологічна асоціація визначає мета-аналіз як «метод об'єднання результатів різних досліджень, що складається з урахування рівня якості їх виконання (наприклад, використання таких раніше визначених критеріїв введення до аналізу, як повнота даних, відсутність явних недоліків в організації дослідження тощо) та аналізу кількісного компонента (статистичне оброблювання наявних даних)». Ця методика сьогодні є однією з тих, що є найбільш популярними, швидко розвиваються і призначені для системної інтеграції результатів окремих наукових досліджень. У Великобританії до 50% методів лікування внутрішніх органів базуються на результатах рандомізованих контрольованих випробувань та відповідних мета-аналізів.

В сучасному світі щороку публікується близько 2 млн наукових медичних статей без врахування матеріалів конференцій різного рівня, книжок тощо. При цьому стає очевидною необхідність синтезу інформації, що подана у вигляді огляду літератури по тій чи іншій проблемі. Основним недоліком підходу, що існував дотепер, а частково і залишився, є відсутність систематичності (в описових оглядах не використовуються строго наукові методи, які необхідно застосовувати при наукових дослідженнях). Таким чином, такі огляди мають суб'єктивний характер, оскільки віддзеркалюють лише думку автора, і важко відтворюються. Ця проблема часто поглиблюється різними (а деколи і протирічними) результатами деяких клінічних досліджень, а також недостатньою кількістю хворих, які залучались до клінічних досліджень. Це, в свою чергу, зумовлює велику імовірність помилки II роду, тобто хибного твердження щодо значної різниці між ефективністю порівнюваних методів лікування, тоді як насправді вони відрізняються.

Так, оцінка інформативності клінічних (особливо діагностичних) досліджень базується на порівнянні їх результатів з результатом

певного точного способу визначення наявності або відсутності захворювання, фактора ризику тощо, тобто з показником, який заслуговує повної довіри дослідників. Його називають «золотим стандартом», референтним чи еталонним методом. Зрозуміло, що клініко-інструментальні та лабораторні методики постійно удосконалюються, тому для кожного конкретного клінічного дослідження обов'язково вказується які саме методи використовувались як еталонні.

В якості характеристик інформативності використовуваних тестів (клінічних, лабораторних, опитувальних тощо) частіше за все визначають чутливість і специфічність цих тестів при виявленні деякого фактора, що виявляється (наявності захворювання, фактора ризику тощо).

В загальному вигляді чутливістю тесту є імовірність позитивного результату діагностики при наявності хвороби (доля суто позитивних результатів тесту). Чутливість у 90% передбачає, що лише цей відсоток з кількості дійсно хворих на підставі цього тесту будуть визнані такими, а у 10% результат буде негативним.

Аналогічно, специфічність тесту – імовірність негативного результату діагностичного тесту при відсутності хвороби, тобто доля дійсно негативних результатів тесту. Тобто, специфічність у 95% означає, що 5% людей, які не страждають від хвороби, будуть визнані хворими. Таким чином, результати тестів будуть неправильно позитивними.

Виходячи з цього, вибіркві оцінки чутливості та специфічності в конкретному дослідженні можна отримати лише в тому випадку, коли весь вибірквий досліджуваний матеріал також протестований із залученням еталонного методу, який дозволив встановити щодо кожного досліджуваного чи наявна в нього хвороба. Лише в цьому випадку показники чутливості і специфічності будуть адекватно віддзеркалювати наявність досліджуваного фактора (в даному випадку хвороби).

Для аналізу складається таблиця певного типу (табл. 3.11). У відповідність з нею чутливість тесту, що застосовується, визначається формулою

$$S = \frac{a}{a + b} \cdot \quad (3.108)$$

Таблиця 3.11 – Форма оцінки діагностичного тесту

	Позитивний результат тесту	Негативний результат тесту	
Хвороба наявна (за даними ета- лонного методу)	Дійсно позитивний результат <i>a</i>	Хибно негативний результат (пропуск мети) <i>b</i>	Сумарна кількість тих, хто дійсно хворі <i>a + b</i>
Хвороба відсутня (за даними ета- лонного методу)	Неправильно позитивний результат (хибна тривога) <i>c</i>	Дійсно негативний результат <i>d</i>	Сумарна кількість тих, хто дійсно не хворі <i>c + d</i>
	Сумарна кількість позитивних результатів тесту <i>a + c</i>	Сумарна кількість негативних результатів тесту <i>b + d</i>	Сумарна кількість обслідуваних <i>a + b + c + d</i>

Аналогічно, специфічність тесту буде визначатися

$$C = \frac{d}{c + d} \cdot \quad (3.109)$$

Ці параметри визначаються у відносних одиницях, тобто характеризують імовірність події. Якщо отримані значення домножити на 100, то вони будуть визначатися у відсотках.

Прогностична цінність тесту визначається двома іншими характеристиками його інформативності, дещо протилежними до показників чутливості та специфічності. Прогностична цінність показує імовірність дійсної наявності чи відсутності хвороби при відомому значенні досліджуваного тесту (позитивному чи негативному) і розраховується за формулою

$$P_+ = \frac{a}{a + c} \quad (3.110)$$

для визначення позитивного результату і

$$P_- = \frac{d}{b + d} \quad (3.111)$$

для визначення негативного результату.

Оскільки задача лікаря, який знає результат тестування, полягає у винесенні вердикту щодо наявності хвороби, то прогностичну цінність називають апостеріорною імовірністю, тобто імовірністю виявлення хвороби після визначення результату тесту. Апріорна імовірність характеризується розповсюдженістю даної хвороби.

Відношення правдоподібності визначається також для позитивного (V_+) та негативного (V_-) результату. Перша з них показує відношення імовірності отримання дійсно позитивного результату S (3.108) до хибно позитивного результату $\frac{c}{(c + d)}$, звідки неважко отримати

$$V_+ = \frac{S}{1 - C}. \quad (3.112)$$

В свою чергу, параметр V_- характеризує відношення імовірності отримання хибно негативного результату до імовірності отримання дійсно негативного результату

$$V_- = \frac{1 - S}{C}. \quad (3.113)$$

Зрозуміло, що підвищення чутливості окремого діагностичного тесту призводить до зниження специфічності і навпаки. Для узгодження цих параметрів використовують ROC-аналіз (Receiver Operating Characteristic Analysis). При цьому будується ROC-крива, яка являє собою залежність чутливості тесту від імовірності його хибно-позитивних результатів ($1 - C$). Інформативність тесту оцінюється за висотою на якій лежить характеристична крива. Фактично цей вид аналізу є частковим видом оптимізації процедури діагностування.

Високочутливі тести доцільно використовувати на етапі попереднього діагностування, коли можливих варіантів багато і частину з них (малоімовірних) можна вилучити. Висока специфічність потрібна для підтвердження попереднього діагнозу, запропонованого на підставі інших даних, оскільки високоспецифічний тест не повинен давати

позитивний результат у випадку відсутності захворювання (тобто рідко буває хибно позитивним).

Високочутливий тест особливо інформативний у випадку видачі ним негативного результату, а високоспецифічний тест – у випадку, коли він показує позитивний результат. З точки зору лікаря, перший з них доцільно використовувати для діагностування небезпечної, але виліковної хвороби, а другий – коли хибний висновок може завдати шкоди пацієнту.

Необхідно також враховувати додатково фінансові, соціальні, політичні та інші чинники. Так, якщо досліджується велика група людей групи ризику на предмет небезпечної хвороби, то доцільно використовувати чутливі тести. Адже представників, які підпали під хибну тривогу, можна потім відсіяти шляхом поглибленого діагностування. Якщо ж немає можливості обстеження великої кількості людей з використанням тестів через брак коштів, то доцільно знижувати чутливість тесту, підвищуючи його специфічність.

Класичним прикладом описового варіанта огляду апаратури та її систематичного аналізу (мета-аналізу) слугує публікація висновку лауреата Нобелівської премії професора Л. Полінга щодо зниження захворюваності в результаті використання аскорбінової кислоти. Цей висновок не був підтверджений надалі результатами відповідного мета-аналізу. В багатьох працях до сьогодні містяться рекомендації щодо профілактики пацієнтів, кому було призначено застосування лідекоїну при гострому інфаркті міокарду, але, в опублікованому пізніше мета-аналізі, його ефективність не підтвердилась. Можна навести ще цілий ряд аналогів даній ситуації.

Ще більш показовою є публікація у The New England Journal of Medicine в 1982 році. В огляді розглянуті вісім досліджень внутрішньовенного введення стрептокінази при інфаркті міокарду. В публікації повідомлялось про смертність протягом перших 45 днів у пацієнтів, які отримували препарат після розвитку хвороби. Три дослідження показали значне зниження смертності, в двох зниження смертності не було значущим, три визначили перевищення смертності порівняно з контрольною групою, хоча строго статистично це не було доведено.

Після цього можна лише зробити висновок щодо необхідності продовження подальших досліджень із розширенням і поглибленням.

Метою мета-аналізу є виявлення, вивчення та пояснення різниці в результатах незалежних досліджень однієї і тієї самої проблеми. Безперечною перевагою цього методу є можливість збільшення статистичної потужності дослідження за рахунок інтеграції даних декількох досліджень, а, відповідно, збільшення точності оцінювання ефекту аналізованого втручання. Це дозволяє більш виважено, ніж при аналізі кожного окремого клінічного дослідження, вказати категорії хворих, для яких реалізація отриманих результатів найбільш ефективна.

Правильно виконаний мета-аналіз передбачає перевірку наукової гіпотези, докладне і чітке викладення використовуваних статистичних методів, докладне викладення і обговорення результатів аналізу, а також сформульованих висновків. Такий підхід забезпечує зменшення імовірності методичних, систематичних та випадкових похибок і дозволяє підвищити об'єктивність отриманих результатів.

Існує два основні підходи до проведення мета-аналізу. Перший з них полягає в повторному статистичному аналізі окремих досліджень шляхом отримання і оброблювання первинних даних, що не завжди можливо. Метою другого підходу є узагальнення опублікованих результатів досліджень, присвячених одній проблемі. Такий мета-аналіз виконується в декілька етапів:

- формування критеріїв включення опублікованих досліджень до мета-аналізу;
- оцінка гетерогенності (статистичної неоднорідності) результатів оригінальних досліджень;
- проведення власне мета-аналізу – отримання узагальненої оцінки величини ефекту втручання, що вивчається;
- аналіз чутливості та потужності проведеного мета-аналізу.

Більш докладно процедура проведення наведена на рис. 3.6.

Мета проведення мета-аналізу повинна бути сформульована абсолютно чітко і конкретно у вигляді правильно сформульованої клінічної задачі.

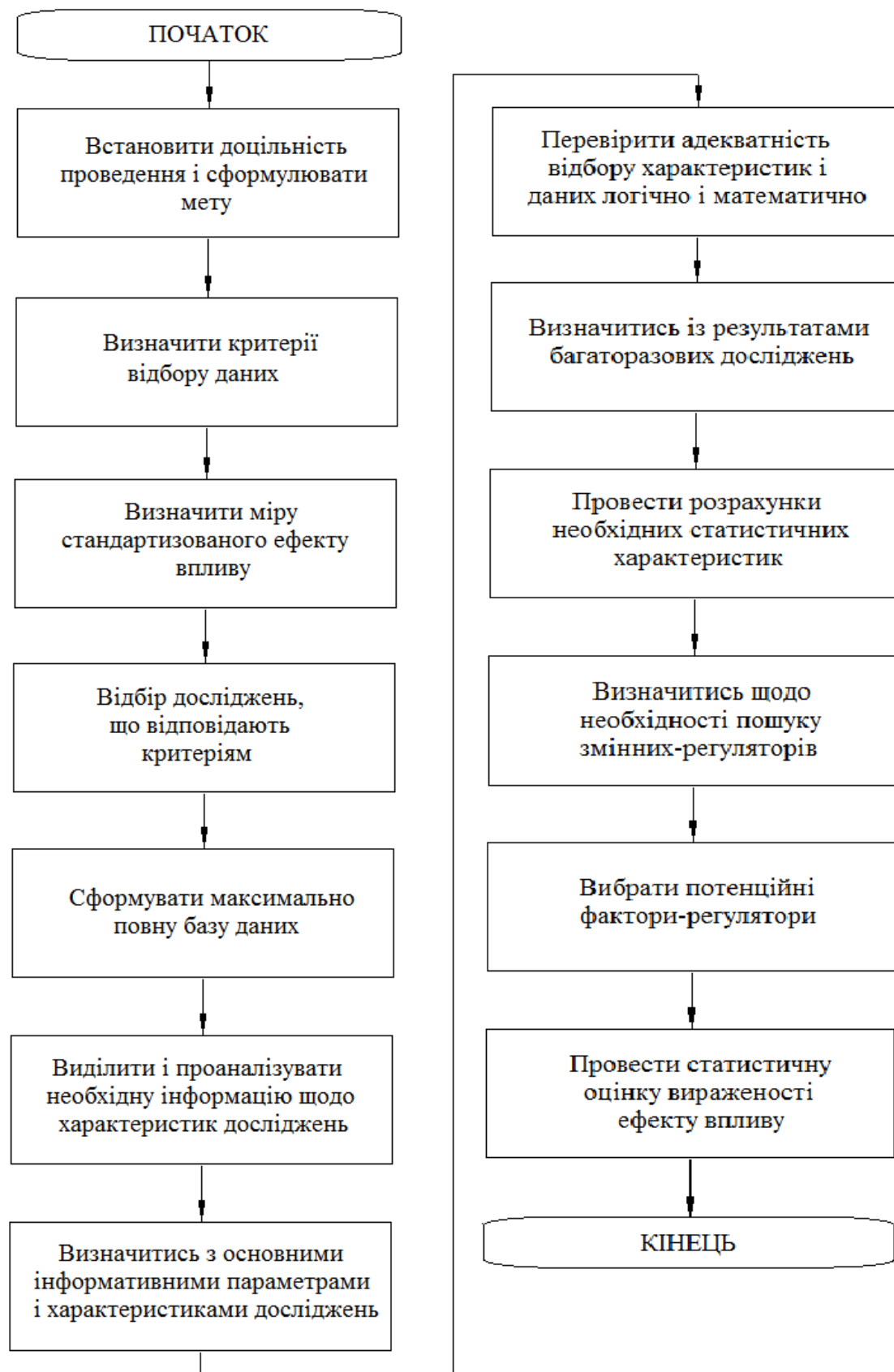


Рисунок 3.6 – Процедура проведення мета-аналізу

Це дозволяє підвищити його вірогідність і чітко визначити категорію хворих, для яких можуть бути ефективно застосовані отримані результати. Чітке формулювання мети має також велике значення для визначення критеріїв відбору даних, а також стратегії в цілому відбору та відсіювання оригінальних досліджень. В більшості випадків у вигляді мети постає питання чи є даний метод лікування більш ефективним порівняно з іншими. Може також поставати питання визначення сумарного ефекту дії декількох препаратів із визначенням впливу кожного з них або порівняння ефекту вживання декількох препаратів подібного механізму дії. У випадку неоднозначності результатів може ставитись задача визначення більш стабільної оцінки ефекту терапії. Під час реєстрації і отримання дозволу на використання лікарських препаратів постає питання обґрунтування їх безпеки і надійності із доказовою базою. Необхідно також планувати подальші дослідження або порівнювати результати одного конкретного з іншими.

Ретельний *відбір* опублікованих та неопублікованих досліджень, що відносяться до задачі мета-аналізу, має переважне значення. Попередньо критерії включення/вилучення досліджень повинні формулюватися на етапі визначення мети і формулювання задач його проведення. Після перегляду знайденої літератури часто доводиться критерії корегувати. Основним принципом відбору повинна бути аналогічність за основними показниками. Якщо критерії включення достатньо широкі, потрібно вводити елементи класифікації, вводячи класи, підкласи, групи, підгрупи тощо. Обов'язково потрібно аналізувати стійкість даних, що полягає у визначенні відповідності результатів досліджень їх умовам і характеристикам.

В літературі наводять ряд причин, які ускладнюють відбір даних:

- дослідження, які демонструють відчутний позитивний ефект, публікуються частіше, ніж ті, де ефект виявився негативним. При цьому можна зробити помилку, якщо користуватися лише офіційними всесвітньо визнаними джерелами;

- результати досліджень, де досягнутий значний позитивний ефект, частіше публікуються в англomовних виданнях. З одного боку це призводить до певного перекосу в огляді джерел, а з другого їх частіше цитують і посилаються на результати. Це може призвести подвійного включення одних і тих самих даних;
- в багатьох випадках результати досліджень публікуються у виданнях, які входять до наукометричних баз. Це може призвести до помилки, якщо проводити пошук лише за ними;
- іноді виникають ситуації, коли результати досліджень публікуються, а пізніше в інших виданнях вони корегуються або спростовуються в порядку наукової дискусії.

На це обов'язково треба звертати увагу для уникнення методичних і систематичних похибок.

Акушер-гінеколог Маркун Т.А. у своєму «записнику» наводить цілий ряд дуже цікавих прикладів, які стосуються аналізу і вилучення даних після їх відбору. Так, в результаті повторюваності даних щодо аналізу ефективності препарату, цей показник виявився завищеним на 23%.

Для вилучення повторюваних даних доцільно сформувати певну форму, яка містила би в собі якісні та кількісні характеристики залежно від мети і задач проведення аналізу. Це дозволяє структурувати зібраний матеріал, класифікувати його і відсіяти все зайве.

Обов'язково потрібно звертати увагу на те, щоб кількісні дані фігурували не у відносних, а в абсолютних величинах, не кажучи вже про абстрактні визначення типу: «значно покращилось». Вираз: «20% результатів...» несе значно менше інформації, ніж: «у 10 випадках з 50...».

Оцінка якості досліджень з одного боку є дуже важливим, а з другого – дискусійним показником. Якщо перший аспект сумніву не викликає, то другий базується на суто суб'єктивних оцінках (часто при нестачі початкових даних). Деякі літературні джерела пропонують планувати роботу аналізу і вилучення даних декільком незалежним виконавцям (від 2 до 8) для підвищення ефективності. Зрозуміло, що це дасть позитивний ефект, але в реальному житті це нереально.

Тому виконавець повинен сам нести повну відповідальність, контролюючи себе на об'єктивність і неупередженість. Результати досліджень треба розглядати з точки зору здорового глузду, закономірностей біології та медицини, клінічного досвіду, умов проведення самих досліджень тощо. Лише після цього можна звертати увагу на статистичні залежності.

В більшості випадків при проведенні інформаційного пошуку доцільно звертати увагу на декілька найважливіших пунктів, які характеризують методологію проведення досліджень з урахуванням мети і задач:

- напрям проведення (фундаментальні чи прикладні);
- умови проведення з урахуванням дотримання методик, протоколів, засобів тощо;
- чіткі критерії відбору об'єктів дослідження (хворих, тварин тощо);
- врахування їх індивідуальних особливостей (стать, вік, географічне розташування тощо);
- обсяг проведених досліджень в абсолютних одиницях (кількість експериментів чи обстежень, час спостереження тощо);
- оцінка впливу супутніх факторів, які впливають на адекватність результатів і викликають методичні, систематичні та випадкові похибки (пора року, кліматичні умови тощо);
- авторитетність організації (академічний інститут, університет, клініка тощо).

До того, як об'єднувати дані, потрібно відповісти на питання чи є вони однорідними. Для цього потрібно визначити *ступінь статистичної дисперсії (гетерогенності)* ефекту у різних дослідженнях. статистична неоднорідність може бути викликана рядом причин. Результати досліджень можуть різнитися завдяки помилкам рандомізації об'єктів досліджень. Навіть, якщо в кожному окремому досліді кінцевий ефект однаковий, загальні результати усіх дослідів розподіляються випадково навколо одного сумарного ефекту. Такий вид статистичної неоднорідності є внутрішньодослідною дисперсією. Крім цього, при дослідженнях можуть вивчатися різні групи, які відрізняються за

індивідуальними ознаками. Таким чином, навіть при вивченні результатів дослідів на велику кількість індивідуумів, ефекти будуть дещо різними. Ці випадкові ефекти визначають відхилення загальної середньої величини ефекту для всіх досліджень, що включені до аналізу, і є дисперсією між дослідями.

Для оцінки статистичної значущості неоднорідності даних, отриманих при різних експериментах, зазвичай використовують тест на гетерогенність χ^2 . При цьому визначають суму середньоквадратичних відхилень між отриманими і очікуваними результатами кожного дослідів, виходячи з припущення, що очікуваний ефект при всіх дослідів однаковий.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - 1)(r_i - \bar{r})^2}{(1 - \bar{r}^2)^2}, \quad (3.114)$$

де

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i r_i}{\sum_{i=1}^k n_i}. \quad (3.115)$$

Велике сумарне відхилення характеризує те, що ефект при різних дослідів був різним.

Лише після цього можна розглядати питання об'єднання даних з урахуванням деяких аспектів оцінки результатів:

- порівняність;
- корельованість між різницями в результатах і в умовах їх отримання;
- тип даних (неперервні, дискретні, дихотомічні).

Це дозволить уникнути методичних та систематичних похибок, об'єднуючи лише аналогічні дані.

Для *мета-аналізу досліджень*, які використовують коефіцієнти кореляцій, на сьогоднішній день існує три підходи: Хеджа-Олкина, Хантера-Шмидта та Розенталя-Рубина. Кожний з них має свої переваги і недоліки. Два останні схожі між собою. Вони відрізняються оцінкою статистичної значущості ефекту. Крім цього, Розенталь та Рубін запропонували лише модель фіксованих ефектів. Обидва ці методи

використовують трансформацію коефіцієнтів кореляції на z -коефіцієнти Фішера, в той час, як метод Хантера-Шмідта передбачає використання початкових значень коефіцієнтів кореляції.

Метод Хантера-Шмідта передбачає переведення розмірностей результатів на єдину метричну систему. Зазвичай всі доступні дані переводять у спеціальну величину r , яку називають стандартизованим ефектом впливу. Надалі наводиться ряд формул, які дозволяють виконати це перетворення:

t -критерій Стюдента може використовуватися для будь-якого парного чи непарного t -тесту

$$r = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + df}}, \quad (3.116)$$

де df – кількість степеней волі;

F - критерій Фішера використовується лише для одномірного дисперсійного аналізу

$$r = \sqrt{\frac{F}{F + df(e)}}, \quad (3.117)$$

де $df(e)$ – похибка df .

Для багатовимірного дисперсійного аналізу

$$r = \sqrt{\frac{F(a) \cdot df(a)}{F(a) \cdot df(a) + F(b) \cdot df(b) + F(ab)df(ab) + df(e)}}, \quad (3.118)$$

де $F(a)$ – перший вплив;

$df(a)$ – кількість степеней волі для А;

$F(b)$ – другий вплив;

$df(b)$ – кількість степеней волі для В;

$F(ab)$ – ефект взаємодії А та В;

$df(ab)$ – кількість степеней волі для взаємодії А та В;

$df(e)$ – похибка df .

χ^2 -критерій Пірсона використовується лише при $df = 1$

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}, \quad (3.119)$$

де N – об'єм вибірки.

d -критерій Коена

$$r = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \frac{4(N-2)}{N}}}, \quad (3.120)$$

де N – сукупний об'єм вибірки, що входить до мета-аналізу;

Для p -показника імовірності нульової гіпотези потрібно перевести двобічне значення p на одnobічне (поділити на 2) та встановити величину відповідного критерію Z у кумулятивній таблиці нормального розподілу.

Окрім r для приведення до єдиної розмірності, наведених у літературі статистичних критеріїв можна використати d -критерій Коена: Середні величини і стандартні відхилення

$$d = \frac{X_e - X_c}{\sigma_p}, \quad (3.121)$$

де X_e – середня для експериментальної групи;

X_c – середня для контрольної групи;

σ_p – об'єднане стандартне відхилення всіх суб'єктів у вибірці.

Об'єднана дисперсія суб'єктів вибірки

$$\sigma_p^2 = \frac{(N_e - 1)\sigma_e^2 + (N_c - 1)\sigma_c^2}{N_e + N_c - 2}, \quad (3.122)$$

де N_e – розмір експериментальної групи;

σ_e – середньоквадратичне відхилення для експериментальної групи;

N_c – розмір контрольної групи;

σ_c – середньоквадратичне відхилення для контрольної групи.

t -критерій Стюдента може використовуватися для будь-якого парного чи непарного t -тесту

$$d = \frac{2t}{\sqrt{df}}, \quad (3.123)$$

де df – кількість степеней волі;

F - критерій Фішера використовується лише для одномірного дисперсійного аналізу

$$d = \frac{2\sqrt{F}}{\sqrt{df(e)}}, \quad (3.124)$$

де $df(e)$ – похибка df .

Стандартизований ефект впливу

$$d = \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (3.125)$$

Наступним кроком є систематизація інформації щодо ефекту впливу, що вивчається. Після конвертації всіх даних, що включені до мета-аналізу, на стандартизовані показники і вони мають однакову розмірність, здійснюється збирання інформації щодо вірогідності виконаних досліджень (відхилень діапазону). Якщо в усіх дослідженнях проведена оцінка вірогідності або відхилення діапазону, ефективність кожного впливу, що вивчається, може бути корегована на рівні кожного окремого дослідження, що входять до аналізу. Оскільки більшість публікацій таку інформацію не надає, для цього методу розроблена процедура встановлення поправок на вірогідність і відхилення діапазону шляхом конструювання розподілів для залежних та незалежних змінних.

Коли зібрані літературні дані узгоджені, потрібно скорегувати систематичну похибку відбору. Вона призводить до випадкової зміни результатів досліджень за рахунок обсягу аналізованої вибірки, оскільки при малих обсягах варіабельність отримуваних даних суттєво зростає порівняно з такими самими дослідженнями, що проводяться при великих обсягах вибірки. Таким чином, корегування ефекту впливу, що вивчається, з урахуванням обсягу досліджуваної вибірки забезпечує більш точне наближення результатів до реальних, які існують в

генеральній сукупності. Корегування здійснюється шляхом обчислення середньозваженої кореляції вибірки

$$\bar{r} = \frac{\sum_j N_j r_j}{\sum_j N_j}, \quad (3.126)$$

де N_j – кількість учасників досліджень;

r_j – стандартизований ефект впливу в кожному окремому дослідженні.

Дисперсія середньозваженої кореляції вибірки визначається за формулою

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_j N_j (r_j - \bar{r})^2}{\sum_j N_j}. \quad (3.127)$$

Середньозважений d -критерій Коена для індивідуальної вибірки і його дисперсія визначаються аналогічно.

Оскільки середньозважена кореляція вибірки не піддається впливу систематичної похибки відбору, її дисперсія суттєво зростає. Для корегування дисперсії задіюють двокрокову процедуру. На першому обчислюють дисперсію систематичної похибки відбору

$$\sigma_{er}^2 = \frac{K(1 - \bar{r}^2)^2}{\sum_j N_j}, \quad (3.128)$$

де K – кількість дослідів, включених до мета-аналізу.

На другому для встановлення дисперсії вибірки, що піддається впливу систематичної похибки відбору, з дисперсії середньозваженої кореляції віднімають дисперсію систематичної похибки відбору

$$\sigma_{pxy}^2 = \sigma_r^2 - \sigma_{er}^2. \quad (3.129)$$

Крім систематичної похибки відбору, на результати досліджень можуть впливати ще два різновиди систематичних похибок, а саме

похибка вимірювань і похибка обмеження діапазону. Похибка вимірювань (вірогідність тесту) оцінюється за допомогою двох показників вірогідності, що розраховуються з результатів конкретного дослідження r_{xx} та r_{yy} , тобто для незалежних і залежних змінних відповідно. Оскільки така інформація зазвичай не публікується, для даного методу запропоноване корегування середньозваженого ефекту впливу у вибірці шляхом використання розподілу оцінок вірогідності. Перевага цього підходу полягає в тому, що він не залежить від особливостей подання результатів у дослідженнях, безпосередньо включених до мета-аналізу. Таким чином, будь-яке дослідження, в якому проводилось оцінювання вірогідності вимірювань, може бути використане для побудови розподілу вказаних оцінок.

Для корегування вірогідності необхідно побудувати розподіл коефіцієнтів вірогідності з використанням всіх наявних джерел. Середнє даного розподілу визначається за формулою

$$\bar{r}_{xx} = \frac{\sum \sqrt{r_{xx}}}{K}, \quad (3.130)$$

де r_{xx} – вірогідність окремого дослідження для незалежної змінної;

K – загальна кількість визначень вірогідності.

Дисперсія даного розподілу визначається

$$\sigma_{rxx}^2 = \frac{\sum (\sqrt{r_{xx}} - \bar{r}_{xx})^2}{K}. \quad (3.131)$$

Середня вірогідність і дисперсія для залежної змінної \bar{r}_{yy} та σ_{ryy}^2 визначається аналогічно.

Відхилення діапазону являє собою випадкове відхилення від встановленого середнього ефекту впливу у консолідованій популяції, тобто розширення діапазону можливих результатів будь-якого вимірювання для граничних значень.

Для корегування цього явища потрібно обчислити u – відношення стандартного відхилення в окремому досліді до стандартного відхилення в деякій референтній популяції. Це відношення викорис-

товується для розрахунку показника відхилення діапазону C для окремого дослідю, з якого була отримана інформація щодо стандартного відхилення

$$\bar{n} = \sqrt{u^2 + (1 - u^2)r^2}, \quad (3.132)$$

де u – відношення стандартного відхилення в окремому досліді до стандартного відхилення в референтній популяції;

r – ефект впливу, що вивчається, у відповідному досліді.

Оскільки така інформація в публікаціях зазвичай не наводиться, то необхідна побудова розподілу елементів відхилення діапазону. Середнє і дисперсія вказаного розподілу обраховуються за формулами:

$$\bar{C} = \frac{\sum_j C_j}{\sum_j N_j}, \quad (3.133)$$

$$\sigma_C^2 = \frac{\sum_j (C_j - \bar{C})^2}{K}, \quad (3.134)$$

де C_j – показник C для кожного конкретного дослідю;

N_j – кількість учасників відповідного дослідю;

K – загальна кількість дослідів, включених до мета-аналізу.

Для спрощення вищевказаних процедур використовується спеціальна система позначень, де середні r_{xx} та r_{yy} позначаються відповідно як a та b , а дисперсія показників вірогідності σ_a^2 та σ_b^2 . Аналогічно середнє відхилення діапазону позначається як c , а його дисперсія σ_c^2 . Знаючи вищеперераховані показники, а саме середньозважений критерій r вибірки, скореговану дисперсію похибок, параметри a , b , c , а також величини дисперсій для середніх значень показників вірогідності і відхилень діапазону, можна оцінити середній ефект впливу для консолідованої популяції. Для цього потрібно внести корекцію до середньоквадратичного критерію вибірки з урахуванням похибок вимірювання і відхилення діапазону

$$\bar{r}_{TU} = \frac{\bar{r}}{abc}. \quad (3.135)$$

Після цього необхідно скорегувати дисперсію взаємозв'язку в межах популяції з урахуванням помилки вимірювань і відхилення діапазону, використовуючи середні значення і дисперсії факторів корегування вірогідності і діапазону a , b , c

$$\sigma_{rTU}^2 = \frac{\sigma_{pxy}^2 - \bar{r}_{TU}^2 (b^2 c^2 \sigma_a^2 + a^2 c^2 \sigma_b^2 + a^2 b^2 \sigma_c^2)}{a^2 b^2 c^2}. \quad (3.136)$$

Ця формула дозволяє розрахувати дисперсію середнього ефекту впливу в популяції. У випадку якщо відсутні значні коливання діапазону між окремими дослідженнями, включеними до мета-аналізу, як це буває зазвичай, вказану процедуру корегування можна пропустити.

Проводячи мета-аналіз потрібно здійснювати пошук змінних регулятора, який може впливати на взаємозв'язок. Для цього пропонується χ^2 -тест на систематичні варіації

$$\chi_{K-1}^2 = \frac{N}{(1 - \bar{r}^2)^2} \sigma_r^2. \quad (3.137)$$

Якщо розрахований критерій χ^2 статистично незначний, то у даній вибірці немає жодної змінної регулятора. Даний тест є дуже потужним при великому N . Він заперечує нульову гіпотезу навіть при незначних відхиленнях між дослідженнями. Альтернативно можна використовувати правило «великого пальця», при якому порівнюються σ_r^2 та σ_{er}^2 . Якщо дисперсія розходжень може пояснити менше 75% нескорегованої дисперсії, можна зробити висновок щодо можливості змінної регулятора.

Метод Мантела-Ханзела ілюструється прикладом, наведеним в літературі.

Таблиця 3.12 – Початкові дані для аналізу

Дослідження	Нью-Йорк		Лондон	
	n_{i1}	p_{i1}	n_{i2}	p_{i2}
$i = 1$ (вік 20 – 34 років)	105	0,771	105	0,324
$i = 2$ (вік 20 – 59 років)	192	0,615	174	0,397
$i = 2$ (вік 35 – 59 років)	145	0,566	145	0,359

В табл. 3.12 початкових даних подані пропорції пацієнтів в Нью-Йорку та Лондоні, яким був пос-

тавлений діагноз шизофренії. Для аналізу визначається зважене середнє окремих відношень шансів за групами \bar{O}_{MH}

$$O_{MH} = \frac{\sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i} p_{i1}(1-p_{i2})}{\sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i} p_{i2}(1-p_{i1})}. \quad (3.138)$$

Критерій χ^2 Мантела-Ханзела перевірки значущості спільної міри зв'язку базується на середньому зваженому різниці між пропорціями

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i} (p_{i1} - p_{i2})}{\sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i}}. \quad (3.139)$$

Статистика χ^2 Мантела-Ханзела задається виразом


$$\chi_{MH}^2 = \frac{\left(\left| \sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i} (p_{i1} - p_{i2}) \right| - 0,5 \right)^2}{\sum_{i=1}^g \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_i} - 1} \bar{p}_i \bar{q}_i \quad (3.140)$$

з однією степінню волі. Для того, щоб статистика мала такий розподіл, кожна з чотирьох сум очікуваних частот $\sum_{i=1}^g n_{i1} \bar{p}_i$, $\sum_{i=1}^g n_{i2} \bar{p}_i$,

$\sum_{i=1}^g n_{i1} \bar{q}_i$, $\sum_{i=1}^g n_{i2} \bar{q}_i$ повинна відрізнятись не менше як на 5 від власного максимуму та мінімуму. Це означає, що треба мати велику кількість таблиць, щоб кожна сума очікуваних частот була великою.

Для здійснення мета-аналізу можна використати програмні продукти, які розповсюджуються вільно і безкоштовно:

 Review Manager 5 <http://www.cc-ims.net/revman/download>

 MIX 2.0 (версии Lite и Pro) – плагин для MS Excel 2007

<http://www.meta-analysis-madeeasy.com/download/index.html>

 EasyMA <http://www.spc.univ-lyon1.fr/easyma.dos/>

- 🖥️ Comprehensive Meta-Analysis (CMA) <http://www.meta-analysis.com/pages/demo.html>
- 🖥️ Модули для программ статистического анализа Stata, SPSS и SAS
- 🖥️ MetaWin 2.0 <http://www.metawinsoft.com/mw2demo.html>
- 🖥️ Epimeta <http://ftp.cdc.gov/pub/Software/epimeta/>
- 🖥️ Meta-Analysis 5.3 http://userpage.fu-berlin.de/~health/meta_e.htm
- 🖥️ Meta-Analysis Calculator (онлайновий)
<http://www.lyonsmorris.com/mal/index.cfm>

Оновлюваний список програмного забезпечення для мета-аналізу розташований за адресами:

- 🖥️ http://www.vetschools.co.uk/EpiVetNet/meta_analysis_software.htm
- 🖥️ <http://statpages.org/javasta2>.
- 🖥️ <http://faculty.ucmerced.edu/wshadish/Meta-Analysis%20Software.htm>.

Результати мета-аналізу зазвичай подаються графічно (точкові та інтервальні оцінки ефектів впливу в кожному з включених до мета-аналізу досліджень), у вигляді таблиць, що містять відповідні статистичні показники. Графічне подання результатів мета-аналізу називають деревоподібною діаграмою. На рис. 3.7 подана деревоподібна діаграма, побудована з використанням програми Review Manager, суміщена з таблицею часткових та інтегральних статистичних показників. Вона ілюструє дані щодо підвищення ризику раку легень у пасивних курців – величини відносного ризику та їх 95% довірчі інтервали для ряду індивідуальних досліджень, відсортовані за зростанням діапазону. Видно, що більша частина публікацій повідомляє про підвищення ризику раку легень, але довірчий інтервал для відносного ризику в більшості дослідів містить 1, що свідчить про невірогідність отриманих даних (тобто значення p перевищує 0,05). В останньому рядку наведений інтегральний показник відносного ризику, розрахований у відповідності із правилами мета-аналізу. Він складає 1,2 при 95% довірчому інтервалі 1,12 – 1,29 ($p < 0,00001$). У колонці “Weight %” вказана відносна вага кожного з окремих дослідів залежно від якості їх виконання і міри доказовості.

Існують також способи оцінки повноти включення до мета-аналізу досліджень. Зазвичай неповнота пов'язана з систематичною похибкою, викликаною з переважною публікацією позитивних результатів досліджень, які описують значущі різниці груп в різних аспектах.

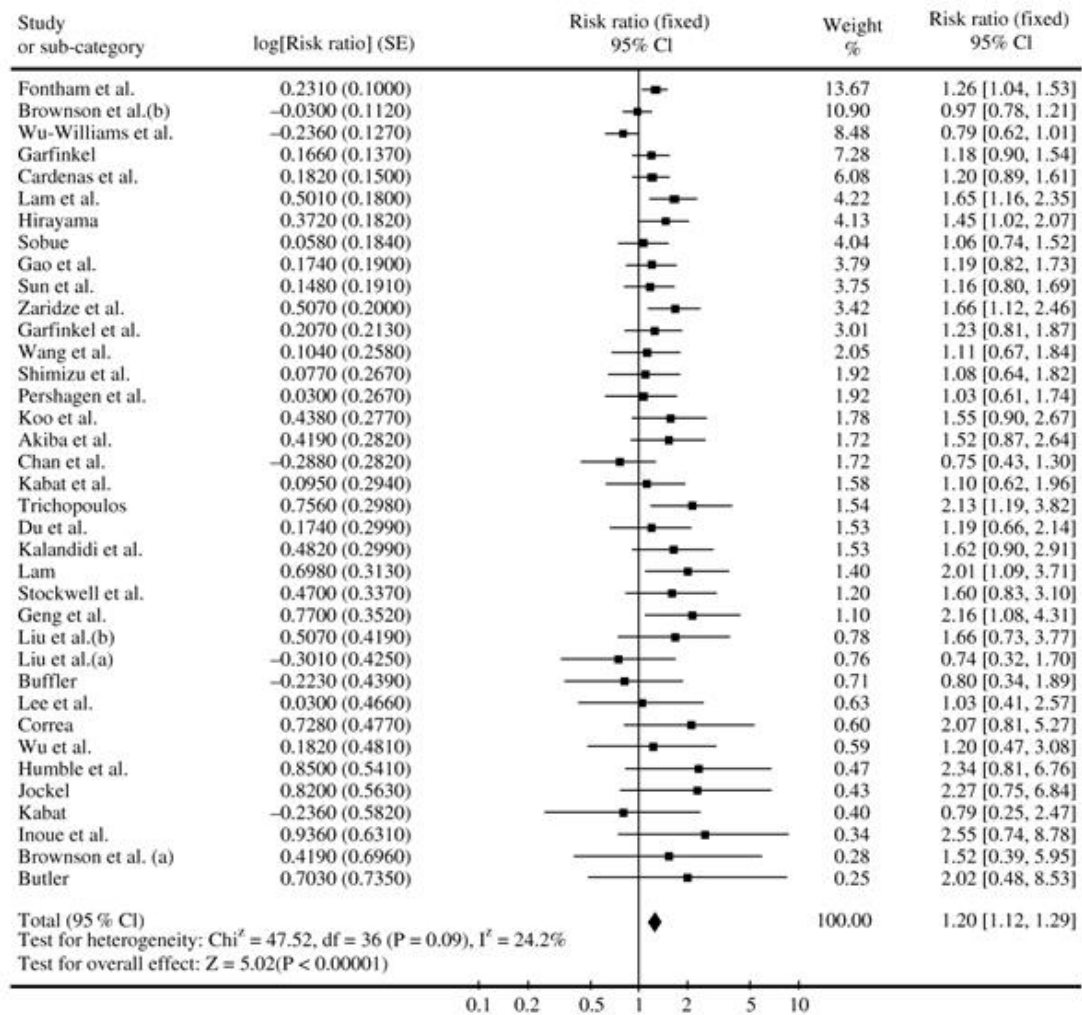


Рисунок 3.7 – Деревоподібна діаграма, побудована з використанням програми Review Manager (за даними R. Taylor, F. Najafi, A. Dobson. Meta-analysis of studies of passive smoking and lung cancer: effects of study type and continent. Journal of Epidemiology 2007 36(5):1048-1059)

Для якісного оцінювання наявності такої системної похибки метааналізу будують воронкоподібні діаграми (рис. 3.8). Вони ілюструють розсіяння результатів окремих дослідів в єдиній системі координат: величина ефекту впливу, що вивчається (по горизонталі) – розмір вибірки у відповідному досліді (по вертикалі). Оскільки точність ви-

значення ефекту збільшується при збільшенні розміру вибірки, діапазон розрахованих значень ефекту значно ширший при малих обсягах дослідів і розташовується внизу діаграми. При великих обсягах, розташованих наверху діаграми, діапазон можливих значень величини ефекту значно вужчий. Але при цьому треба уникати інших систематичних похибок, пов'язаних з коректністю самої постановки експерименту. Така закономірність і надає діаграмі характерної форми. Час-

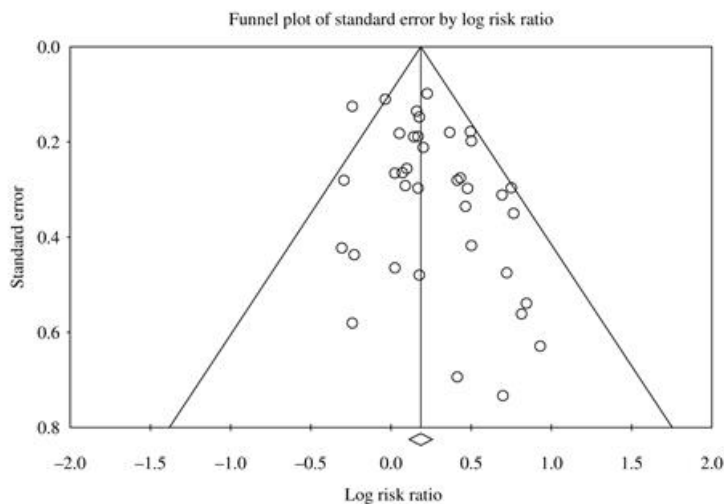


Рисунок 3.8 – Воронкоподібна діаграма, побудована за допомогою програми Comprehensive Meta-Analysis (CMA), ілюструє дослідження впливу пасивного паління на частоту розвитку раку легень, включені до мета-аналізу (за даними R. Taylor, F. Najafi, A. Dobson. Meta-analysis of studies of passive smoking and lung cancer: effects of study type and continent. *Journal of Epidemiology* 2007 36(5):1048-1059)

дів можуть бути більше чи менше цього значення, причому розкид збільшується при зменшенні обсягу вибірки.

При правильно сформованій базі даних кількість робіт, де ефект впливу перевищує і є меншим від середнього значення, повинні бути приблизно однаковими. У випадку систематичної похибки, пов'язаної з переважною публікацією позитивного ефекту, воронкоподібна діаграма виявляється асиметричною (рис. 3. 9). Асиметрія такого типу може спостерігатися і у випадку методичної похибки при низькій яко-

тотні характеристики ефекту впливу чи відношення шансів зазвичай наносяться на діаграму у логарифмічному масштабі.

Видно, що при збільшенні обсягів вибірки встановлене значення ефекту впливу наближається до певної середньої величини, близької до дійсного значення у генеральній сукупності, в той час як доні окремих дослі-

сті виконання дослідів малих обсягів, коли отриманий в них результат суттєво відрізняється від дійсної величини ефекту впливу.

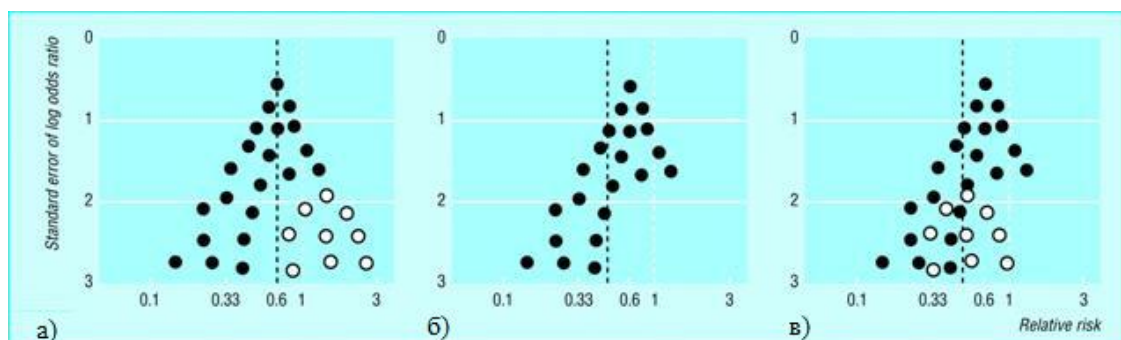


Рисунок 3.9 – Симетричність та асиметричність воронкоподібної діаграми:

- а – діаграма симетрична, білим показані негативні результати деяких дослідів малих обсягів;
- б – асиметричність воронки, пов'язана з похибкою публікації, коли дані із негативним ефектом з якихось причин не увійшли до мета-аналізу;
- в – асиметричність воронки, пов'язана з низькою якістю проведення дослідів малих обсягів.

Програма Comprehensive Meta-Analysis (СМА) дозволяє на ос-

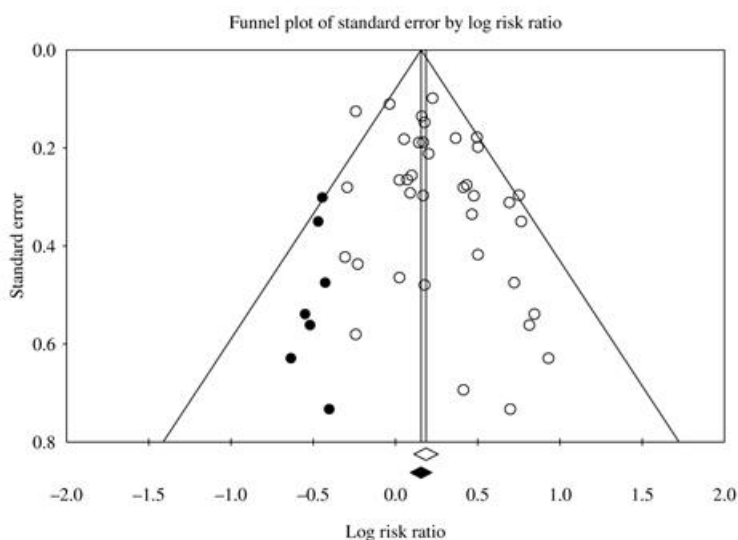


Рисунок 3.10 – Результат виконання процедури «trim and fill» програмою Comprehensive Meta-Analysis (СМА). Програма виявила сім пропущених публікацій (позначені чорними кружечками). При цьому середня складає 1,204 у не скорегованій діаграмі і 1,169 у скорегованій

нові аналізу воронкоподібної діаграми приблизно оцінити кількість публікацій, не включених до мета-аналізу. Це процедура «узгодження і заповнення» (рис. 3.10).

Перспективність мета-аналізу визначається простотою його проведення і мінімум витрат (комп'ютер + Інтернет + безкош-

товні програми вільного розповсюдження). Отримані результати є високо доказовими, мають привабливий науковий вигляд.

Не дивлячись на ефективність, мета-аналіз має і певні недоліки. Першим з них є «проблема картотечної скриньки» – тенденція не публікувати статистично незначущі результати, зберігаючи їх в архівах дослідників. Таким чином, опубліковані дослідження висвітлюють переважно позитивні результати, в результаті чого зростає помилка І роду. Для корегування цього пропонується включення до аналізу даних неопублікованих досліджень, отриманих з особистих і професійних джерел. Але далеко не всі неопубліковані дані доступні і придатні для аналізу. Розенталь запропонував як часткове рішення цього використати оцінку потрібної кількості незначущих даних, яку потрібно було б отримати для того, щоб анулювати цей ефект. Якщо потрібна кількість додаткових даних достатньо велика, тоді до результатів аналізу, який базується на доступних даних, можна довіряти.

Крім цього, мета-аналіз нечутливий до різниці якості аналізованих досліджень. Результати досліджень може бути важко інтерпретувати, якщо дані з добре спланованих дослідів поєднуються з даними, отриманими в результаті невдалого експериментального плану. Мета-аналітичні процедури можна орієнтувати на цю проблему, кодуючи досліді відповідно до якості плану із наступним введенням цієї змінної до аналізу. Таким чином можна побачити чи будуть різнитися результати аналізу залежно від якості планування дослідів.

По-третє, в публікаціях часто повідомляються множинні дані. Оскільки вони не є незалежними, виникає питання щодо врахування залежності між ними під час мета-аналізу. Можна виконувати його окремо для кожної міри залежної змінної, виявленої в наукових публікаціях, або при мета-аналізі об'єднують дані, що стосуються значущості і впливу незалежної змінної на всі міри залежної змінної. Але, якщо такі множинні дані включаються до аналізу, його результати можуть виглядати більш надійними порівняно з проведеними дослідженнями, оскільки не всі використані в ньому дані є незалежними. Хоча не існує правила, яке передбачає в таких випадках вибір правильного методу, то залежно від того, як це вирішується емпірично, мо-

же суттєво впливати на результати мета-аналізу. Якщо множинні дані одних і тих самих дослідів включаються до аналізу, кількість критеріїв значущості і величини ефектів буде більшою за кількість незалежних дослідів. Не дивлячись на те, що при цьому підвищується потужність мета-аналізу, він не лише ускладнює визначення похибки, пов'язаної зі статистичними результатами аналізу, але й може створювати концептуальну невизначеність та плутанину. Зрозуміло, що доцільно знати загальну значущість і спільний вплив заданої незалежної змінної на всі залежні змінні, але знання диференціальної значущості і часткового впливу незалежної змінної на окремі групи залежних змінних може мати більш важливе значення щодо розуміння певних аномалій.

Література

1. Дубовой В.М. Програмування комп'ютеризованих систем автоматизації і управління / В.М. Дубовой, Р.Н. Кветний – Вінниця: ВДТУ, 1997 – 208 с.
2. Кветний Р.Н. Методи комп'ютерних обчислень / Р.Н. Кветний – Вінниця: ВДТУ, 2001 – 148 с.
3. Реброва И.А. Планирование эксперимента / И.А. Реброва – Омск: СиБАДИ, 2010. – 105 с.
4. Куприенко Н.В. Статистические методы изучения связей / Н.В. Куприенко, О.А. Пономарева, Д.В. Тихонов – С.-Пб: Издательство политехнического университета, 2008. – 117 с.
5. Славутский Л.А. Основы регистрации данных и планирования эксперимента / Л.А. Славутский – Чебоксары: ЧГУ, 2006. – 200 с.
6. Осипенко Н.Б. Планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных / Н.Б. Осипенко – Гомель: ГГУ, 2010. – 49 с.
7. Кулик А.Я. Алгоритми адаптивного передавання інформації. / Монографія. / А.Я. Кулик – Вінниця: ВДТУ, 2003. – 213 с.
8. Кветний Р.Н. Методи та засоби передавання інформації у проблемно-орієнтованих розподілених комп'ютерних системах / Р.Н. Кветний, А.Я. Кулик – Вінниця: ВНТУ, 2010 – 362 с.

9. Основы доказательной медицины / Под общей редакцией Р.Г. Оганова. – М.: Силицей-Полиграф, 2010. – 136 с.
10. Петров В.И. Медицина, основанная на доказательствах / В.И. Петров, С.В. Недогода, 2012.- 144 с. / <http://vmede.org>
11. Жильцов И.В. Основы медицинской статистики. Дизайн биомедицинских исследований / И.В. Жильцов, В.М. Семенов, С.К. Зенькова. – Витебск: ВГМУ, 2014. – 154 с.